Пятница, 10 июля 2015 г.

Задача 1. Конечное множество $\mathcal{S}$ точек на плоскости будем называть *сбалансированным*, если для любых различных точек A и B из множества $\mathcal{S}$ найдется точка C из множества $\mathcal{S}$ такая, что $AC = BC$. Множество $\mathcal{S}$ будем называть *эксцентричным*, если для любых трех различных точек A, B и C из множества $\mathcal{S}$ не существует точки P из множества $\mathcal{S}$ такой, что $PA = PB = PC$.

(a) Докажите, что для любого целого $n \geqslant 3$ существует сбалансированное множество, состоящее из n точек.

(б) Найдите все целые $n \geqslant 3$, для которых существует сбалансированное эксцентричное множество, состоящее из n точек.

Задача 2. Найдите все тройки (a, b, c) целых положительных чисел такие, что каждое из чисел

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

является степенью двойки.

(*Степенью двойки называется число вида* 2^n, *где* n — *целое неотрицательное число.*)

Задача 3. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AB > AC$. Пусть Γ — окружность, описанная около него, H — его ортоцентр, а F — основание высоты, опущенной из вершины A. Пусть M — середина стороны BC. Пусть Q — точка на окружности Γ такая, что $\angle HQA = 90^\circ$, а K — точка на окружности Γ такая, что $\angle HKQ = 90^\circ$. Пусть точки A, B, C, K и Q различны и лежат на окружности Γ в указанном порядке.

Докажите, что окружности, описанные около треугольников KQH и FKM, касаются друг друга.

Время на работу: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов

Суббота, 11 июля 2015 г.

Задача 4. Пусть Ω — окружность, описанная около треугольника ABC, а точка O — ее центр. Окружность Γ с центром A пересекает отрезок BC в точках D и E так, что точки B, D, E и C все различны и лежат на прямой BC в указанном порядке. Пусть F и G — точки пересечения окружностей Γ и Ω, при этом точки A, F, B, C и G лежат на Ω в указанном порядке. Пусть K — вторая точка пересечения окружности, описанной около треугольника BDF, и отрезка AB. Пусть L — вторая точка пересечения окружности, описанной около треугольника CGE, и отрезка CA.

Пусть прямые FK и GL различны и пересекаются в точке X. Докажите, что точка X лежит на прямой AO.

Задача 5. Пусть $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие равенству

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

для всех действительных чисел x и y.

Задача 6. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ целых чисел удовлетворяет следующим условиям:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ для всех $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ для всех $1 \leqslant k < \ell$.

Докажите, что существуют два положительных целых числа b и N таких, что

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

для всех целых чисел m и n, удовлетворяющих условию $n > m \geqslant N$.

Время на работу: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов