Вступительная работа

в летнюю физико-математическую школу «Дважды Два» по математике.

***Правила выполнения:***

Работа выполняется на листах А4 или тетрадных листах на русском языке. В исключительных случаях по разрешению Директора школы – на родном языке. Каждый лист подписывает печатными буквами – фамилия, имя, класс, город, школа.

Решать задачи можно в любом порядке, но обязательно писать номер задачи. Ниже приведены условия задач. После номера задачи стоит номер класса, для которого эта задача предназначена. Решать за более старший класс можно, за более младший решения проверяться не будут. Постарайтесь написать хоть минимальные пояснения по каждой решенной вами задаче.

Решения следует сфотографировать или отсканировать и прислать по адресу camp@mathbaby.ru до 15 мая 2011 года

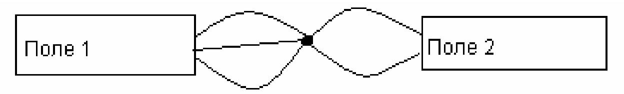
1. (4) Бросают два игральных кубика. Сколько существует различных вариантов получить в сумме 7 очков?
2. (4-5) Два велосипедиста одновременно выехали из пунктов А и Б, расстояние между которыми равно 33 км, навстречу друг другу, первый со скоростью 15 км/ч, второй – 20 км/ч. Когда второй велосипедист проехал треть пути, у него сломался велосипед, и он пошёл пешком со скоростью 5 км/ч. Кто из велосипедистов и на сколько раньше доедет до места встречи?
3. (4-5) Деревянный куб размера 4x4 покрасили красной краской и распилили на кубики 1x1.

а) Сколько кубиков 1x1 получилось?

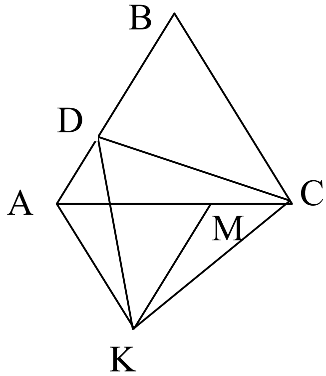
б) Сколько кубиков 1x1 оказалось неокрашенными?

в) У скольких кубиков 1x1 окрашено ровно 2 грани?

4. (4-6) В тёмной коробке на темной планете лежат носки: 6 пар черных, 8 пар белых и 7 пар бежевых. Также нам известно, что среди носков не более 5 рваных. Сколько носков нужно вынуть из коробки, чтобы в руках точно оказалась пара целых носков одного цвета?
5. (4-6) В Битцевском парке есть два футбольных поля. Их соединяют тропинки (см.рис.) Сколькими способами можно добраться от одного поля до другого?




6. (5-7) На полянке растут грибочки. Каждый день их становится вдвое больше. Через неделю полянка была заполнена грибами. Через сколько дней полянка была заполнена наполовину?
7. (5-7) Маша купила прямоугольный кусок сыра и оставила на столе. Его нашли мыши и стали есть. Через 7 минут длина, ширина и высота куска уменьшились вдвое. Через сколько минут сыр закончится?
8. (5-7) 2011 аборигенов с острова рыцарей и лжецов встали в круг, и каждый из них заявил всем остальным: «Про своих соседей я говорить не буду, а все остальные здесь – лжецы». Сколько рыцарей могло быть среди этих аборигенов?
9. (7-8) На рисунке треугольники ABC, CDK и AKM – равносторонние. Докажите, что AD = MC.




10. (7-9) Известно, что a и b – положительные числа. Докажите, что $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} \geq \dfrac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$.

11. (7-9) В треугольнике ABC угол A тупой, а перпендикуляры к сторонам AB и AC, восстановленные в точке A, делят сторону BC на три равные части. Найдите углы треугольника.

12. (7-10) На дверях 2008 кабинетов висят замки 5 различных видов, причем замки одного вида имеют абсолютно одинаковые ключи, а разного вида – разные. Все 2008 ключей оказались заперты в кабинетах так, что в каждом кабинете заперт один ключ, которым эту комнату открыть нельзя. Сторож Кирилл имеет дубликат ключа от одного из кабинетов. Докажите, что он может открыть все кабинеты, если известно, что количество замков разных видов различно.

13. (8-10) Найдите все натуральные решения уравнения $n!k! = n! + k! + m!$ . ($n!$ – «факториал числа n» – произведение всех натуральных чисел от 1 до n)

14. (8-10) Среди 18 человек любые двое либо дружат, либо враждуют друг с другом. Докажите, что найдутся четверо, которые либо все друг другу друзья, либо все друг другу враги.

15. (8-10) Четырехугольник ABCD – описанный. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются друг друга.

16. (8-10) В некотором государстве больше 10 городов, причем любые два города соединены прямым рейсом самолета или поезда. Известно, что пользуясь только одним из этих двух видов транспорта, никакие 4 города невозможно объехать, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться обратно. Докажите, что тогда пользуясь только одним видом транспорта никакие 5 городов невозможно объехать, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться обратно.

17. (9-10) Найдите все пары положительных чисел $(x, y)$, удовлетворяющие равенству $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2 \cdot \left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}\right)$.

18. (9-10) На плоскости заданы 2011 полуплоскости, внутренности которых покрывают всю плоскость. Докажите, что из этих полуплоскостей можно выбрать три, внутренности которых тоже покрывают всю плоскость.

19. (10) Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и такова, что $f(x+3) \le f(x) + 3$ и $f(x+2) \ge f(x) + 2$ для любого $x$. Докажите, что функция $g(x) = f(x) - x$ — периодическая.

20. (10) На механико-математическом факультете Московского Государственного Университета учится n девочек и сколь угодно много мальчиков. Каждая k-ая девочка знакома с первыми 2k-1 мальчиками (мальчики пронумерованы). Сколько существует способов разбиения студентов на пары для бала МГУ?

***Замечание***. Совсем не обязательно выполнить все задачи, предназначенные для вашего класса. Решите те, что сможете. Для зачисления может оказаться достаточным одной задачи с оригинальным решением.

***Желаем успеха!***