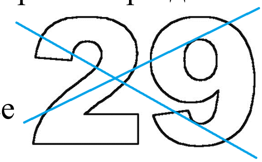
Краткие решения задач олимпиады 5 класса
29 января 2023
Часть А

К каждой задаче необходимо указать ответ.
Решения приводить не требуется.

1. В дате 29 января Коля заменил все буквы числами − номером буквы в русском алфавите − и получил число 293315311833. Вычеркните в этом числе 5 цифр так, чтобы получилось А) наибольшее из возможных; Б) наименьшее из возможных семизначных чисел. (*Е.Иванова*)

Ответ. А) 9531833; Б) 1311833

2. Сегодня 29 января. Петя вырезал из картона цифры 2 и 9 и наклеил их на лист, как на рисунке. Двумя прямыми разрезами разделите картонные цифры на 9 кусочков. (*Е.Иванова*)



Ответ. один из вариантов приведен на рисунке.

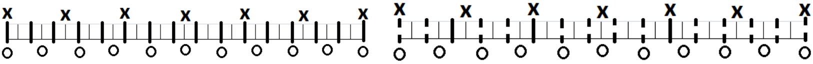
3. Федя разложил 20 орехов на три тарелки (не все на одну) так, что седьмая часть орехов на первой тарелке равна пятой части орехов на второй тарелке. Сколько орехов лежит на третьей тарелке? (*Т.Антошкина*)

Ответ. 8 орехов.

Решение. Если седьмая часть того, что на первой тарелке, равна пятой части того, что на второй, то на первой лежит 7 одинаковых частей, а на второй − 5 таких же частей. Итого 12 частей. Если в каждой части хотя бы 2 ореха, то орехов как минимум 24, а у нас только 20. Значит, одна часть = 1 ореху и на третьей тарелке лежит 20 − 12 = 8 орехов.

4. Саша посылает в телеграм сообщения Маше каждые 2 минуты. Маша проверяет телефон каждые 5 минут. Папа написал и запустил на телефон Саши вирус, который запускается каждые 3 минуты и удаляет все сообщения Саши, которые есть в данный момент. Если вирус включается в тот же момент, что Саша пишет сообщение, то вирус не даёт его отправить. Ровно в полдень Саша начал писать сообщения, а Маша − проверять телефон. И в тот же момент первый раз включился вирус. Сколько сообщений получит Маша к 14:00? (*Е.Иванова*) **Ответ**. 12 смс

Решение. Поскольку 2·3·5=30, то ситуация повторяется каждые полчаса. Поэтому достаточно разобраться, что происходит за полчаса, а далее умножить на 4. Отметим на рисунке **|** − моменты, когда Саша пишет смс, х − моменты, когда Маша читает смс, а **о** – моменты включения вируса.



На второй картинке сообщения, которые Маша не успеет прочитать, отмечены пунктиром. Отсюда видно, что за полчаса Маша сможет прочитать 3 смс, соответственно за 2 часа − 12 смс

5. Расставьте в клетках таблицы 3×3 числа от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел в каждом квадратике 2×2 давала при делении на 4 разные остатки. (*К.Александров, В.Иванов*)

Ответ. один из вариантов на рисунке

3	**2**	**5**
1	**4**	**6**
7	**8**	**9**

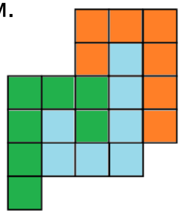
6. У Буратино был блокнот, сшитый из 25 двойных листов в их середине. Все страницы пронумерованы числами от 1 до 100. Буратино вырвал 17 двойных листов и заново пронумеровал страницы получившегося блокнота, написав числа рядом с предыдущими. В результате на одной странице оказалось написано число 523. Какое число может быть написано на бывшей 94 странице, если известно, что она не вырвана? (*Е.Иванова*)

Ответ. 3094 или 3294.

Решение. Заметим, что номера на вырванных страницах имеют вид N, N+1, 100−N и 101−N. То есть каждый двойной лист имеет две половинки: с нумерацией до 50 и после 50. Если вырвано 17 листов, то с каждой части (до 50 и после 50) осталось по 8 листов. Какие варианты дописывания числа могли быть? а) было 52, дописал в конце 3. Такого быть не могло, так как чётность имеющихся и дописываемых чисел одна и та же. б) было 5, дописал 23. Этого тоже не могло быть. Так как в новом блокноте листов меньше, значит новые числе не могут быть больше старых. в) аналогично не могло быть и было 3 дописал 52. г) остался вариант было 23, дописал 5. Этот вариант возможен. Тогда это бывшая 23 страница и она стала 5-ой. Значит, перед ней вырваны все листы, кроме двух. Следовательно бывшая страница 94 либо на последнем листе, либо на предпоследнем.

7. Разрежьте фигуру на рисунке на 3 равные части: (*В.Иванов*)

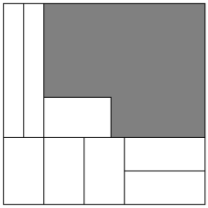
Ответ. на рисунке

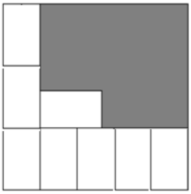


8. У Кирилла есть 12 карточек: 3 желтых, 2 голубых, 2 синих, 1 оранжевая, белая карточка с цифрой 0, две карточки со знаком умножения и одна карточка со знаком равенства. Напишите на пустых карточках цифры (на каждой карточке одну цифру) и составьте из всех карточек верное равенство так, чтобы на карточках одного цвета были написаны одинаковые цифры, а на карточках разных цветов − разные (*по мотивам фольклора Е.Иванова*)

Ответ. один из вариантов: 2023 = 7 × 17 × 17.

9. Гоша нарисовал квадрат, а потом разбил его на несколько прямоугольников одинаковой площади. Затем он закрасил целиком несколько прямоугольников так, что их границы стали не видны, а остальные прямоугольники на рисунке остались (см. рисунок). Сколько прямоугольников закрасил Гоша? (*Н.Михайловский*)

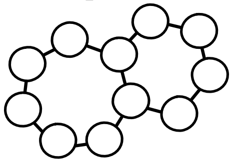




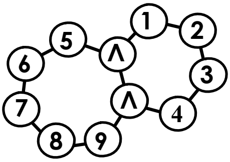
Ответ. 7 прямоугольников.

Решение. Рассмотрим три левых прямоугольника: два узких и один широкий. Поскольку по условию у них одинаковая площадь, то у длинного одна сторона короче одной стороны широкого, а вторая − в два раза шире второй стороны широкого. Аналогичные рассуждения справедливы и для крайних правых. Таким образом, исходная картинка эквивалентна той, что на втором рисунке. Значит, площадь исходного квадрата равна площади 15 маленьких прямоугольников, а площадь серой части: 15 − 8 = 7.

10. Однажды 11 жителей Острова рыцарей и лжецов встали в необычный хоровод, как на рисунке. Каждый заявил: *«Среди моих соседей поровну рыцарей и лжецов!»*. Сколько могло быть рыцарей среди собравшихся? Укажите все возможные варианты. (Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет) (*К.Бондаренко*)



Ответ. 0 или 4.



Решение. У двух жителей на пересечении кругов по 3 соседа, значит, каждый из них не может иметь поровну соседей-рыцарей и соседей-лжецов. Значит, оба они лжецы. Рыцарей может не быть вообще, этот вариант подходит. Если рыцари есть, то можно заметить, что они обязаны стоять парами. Если рыцарь имеет в соседях двух лжецов,то он сказал ложь. Если есть три подряд идущих рыцаря, то средний рыцарь лжёт. Значит 1 2 3 4 все лжецы. Т.к. если на 1 2 пара рыцарей, то на 3 лжец скажет правду. Если на 2 3 пара рыцарей, то лжец на 4 скажет правду. Если на 3 4 пара рыцарей, то лжец на 2 скажет правду. С другим кругом. Если 7 рыцарь, то парный ему рыцарь находится на 6 или на 8. Если на 6, то тогда лжец на 5 скажет правду. Если на 8, то лжец на 9 скажет правду. Значит, 7 не может быть рыцарем. Рассмотрим пары 6-5 и 8-9 Если это две пары рыцарей, то этот вариант подходит. Если же в одной паре, например, в 6-5 есть лжец, то и второй из этой пары лжец Аналогично для пары 8-9.

Часть Б

В этой части кроме ответа требуется привести решение.

1. У Васи есть одна большая свеча, которая сгорает за 9 минут и три маленьких свечки, каждая из которых сгорает за 5 минуты. Свечи горят неравномерно. Как Васе отмерить две минуты с помощью этих свечей? (*А.Бронников*)

Решение. Зажигаем одновременно большую свечу и одну меленькую. Когда маленькая полностью сгорит, зажигаем оставшиеся маленькие. Когда догорит большая, в них останется по 1 минуте. теперь обе тушим, а потом по очереди зажигаем.

2. Костя записал в строчку последовательность цифр 77007700770077. Потом разделил последовательность на фрагменты из двух или трёх цифр. а) Могло ли оказаться, что фрагментов, начинающихся с цифры 0, в 2 раза *меньше*, чем фрагментов, начинающихся с цифры 7? б) Могло ли оказаться, что фрагментов, начинающихся с цифры 0, в 2 раза *больше*, чем фрагментов, начинающихся с цифры 7? (*К.Бондаренко*)

Ответ. а) Да, могло. 770 07 700 77 00 7. б) Не могло.

Решение б). Предположим, такое возможно. В последовательности 14 цифр, значит всего фрагментов может быть 5, 6 или 7. Но количество фрагментов кратно 3. Откуда ясно, что их всего 6, а фрагментов, начинающихся с цифры 0, было 4. Рассмотрим две цифры 0, стоящие рядом: только одна из цифр может быть началом фрагмента. А так как в последовательности три пары нулей, то и фрагментов, которые начинаются с 0, не более 3. Противоречие.

Решение2. Групп из нулей, стоящих рядом, три. только одна из цифр может быть началом фрагмента. Значит, фрагментов, начинающихся с 0, не более трёх. Определяем, что их два, т.к. иначе всего фрагментов 9 и символов не менее 9·2 = 18. А у нас их только 14. Тогда фрагмент, начинающихся с 7, всего один. Такого не может быть, так как три фрагмента содержат не более 3·3 = 9 цифр, а их в последовательности 14.

3. У Деда Мороза есть мешок с конфетами для подарков к Новому 2024 году. Он хочет разложить их в одинаковые коробки. Сначала он складывал по 39 конфет в каждую коробку. У него получилось 37 полных коробок, а чтобы заполнить 38-ую коробку конфет не хватило. Тогда Дед Мороз решил складывать по 37 конфет в каждую коробку, у него получилось 40 коробок, но все конфеты всё равно не поместились. Сколько конфет всего у Деда Мороза?. (*Е.Фисенко*)

Ответ. 1481 конфета .

Решение1. Пусть у Деда Мороза А конфет. Тогда при делении А на 39 получается в частном 37 и какой-то остаток x, а при делении А на 37 получается в частном 40 и какой-то остаток y.

А = $37 \cdot 40 + y = 37 \cdot 39 + 37 + y$ = $39 \cdot 37 + x$

По свойству остатков x < 39, значит y< 2. По условию остатки ненулевые, значит, y = 1. Подставляя в любое выражение, находим ответ.

<u>Решение2.</u> В первый раз Дед Мороз смог упаковать $37 \cdot 39 = 1443$ конфеты и осталось меньше 39 конфет. Во второй раз он упаковал $37 \cdot 40 =$1480 конфет и осталось меньше 37 конфет. Во второй раз было упаковано на 37 конфет больше, то есть разность оставшихся конфет после первого и второго раза – 37 штук, при этом в первый раз их осталось меньше 39, то есть хотя бы 38, а во второй раз остаток точно был, то есть хотя бы 1 одна конфета осталась. 38 – 1 = 37. Значит количество конфет $39 \cdot 37 + 38 = 37 \cdot 40 + 1 = 1481$.

4. В 5Ю классе мальчиков столько же, сколько девочек. Известно, что у каждого школьника либо 6, либо 7 друзей в этом классе. Однажды все, у кого 6 друзей, подарили своим друзьям по шоколадке, а все, у кого 7 друзей, подарили всем своим друзьям по открытке. Маша сосчитала, что общее число подаренных шоколадок равно общему числу подаренных открыток. Сколько человек в классе, если все умещаются в кабинете с 20ю двойными партами? (*Е.Иванова*) **<u>Ответ</u>**. 26 человек.

<u>Решение</u>. Пусть тех, у кого ровно 6 друзей, x человек, тогда тех, у кого ровно 7 друзей, N − x человек, где N − количество человек в классе. Тогда 6x = 7(N−x), откуда 13x = 7N. Следовательно, число человек в классе кратно 13: 13, 26, 39, 52, … . Так как в классе мальчиков столько же, сколько девочек, то всего учеников чётное количество. Так как парт 20, то их не больше 40. Отсюда подходит ровно одно число: 26.

5. Мише, Андрею и Гоше подарили 19 яблок. Известно, что каждый из них говорит правду, когда имеет нечётное число яблок и лжёт − когда чётное. Миша сказал: «У меня на одно яблоко меньше, чем у взятых вместе Андрея и Гоши». Андрей сказал: «У меня 6 яблок». Гоша сказал: «У Андрея на 2 яблока меньше, чем у меня». Сколько яблок у Миши? (*В.Иванов*) **<u>Ответ</u>**. 9 яблок.

<u>Решение</u>. Андрей сказал, что у него 6 яблок. Если бы это была правда, то по условию он должен был бы соврать (так как 6 − чётное число), что приводит к противоречию. Значит, это ложь, поэтому у Андрея чётное число яблок, но не 6. Аналогично с Гошей: Если б у него было нечётное число яблок, то он должен был сказать правду. Но нечётное число не может отличаться от чётного на 2. Значит, Гоша солгал и у него тоже чётное число яблок. Всего всех яблок нечётное число. Значит, у Миши их количество нечётно. Поэтому утверждение Миши верно. То есть сумма яблок у Андрея с Гошей и количество яблок у Миши - два последовательных числа, дающие в сумме 19. То есть 9 и 10. И у Миши 9 яблок.

Критерии:

Каждый правильный ответ в части А стоит 2 балла. В некоторых задачах можно было получить 1 балл за неполный ответ.

В части Б оценивается решение – от 0 до 5 баллов.

Творческая Лаборатория «Дважды Два»

Творческая Лаборатория «2×2» – содружество преподавателей, студентов, аспирантов и просто математиков, обеспокоенных состоянием математического образования в России и мире. Мы хотим, чтобы наши дети росли любознательными, заинтересованными, грамотными, и стараемся по мере сил этому содействовать. За много лет работы мы создали систему обучения детей математике с 1 по 11 класс. Она включает в себя матклассы, олимпиады различного уровня, разнообразные кружки.

Кроме олимпиад мы проводим выездные математические школы для всех классов. Школы проводятся в период каникул, а также майских праздников. Кроме того мы проводим мини-школы или школы выходного дня. Ближайшая выездная школа планируется ***в Сочи с 17 февраля*** .

Летняя школа в Подмосковье (3 смены) – ***с 1 июня по 2 июля*** – 0-7 кл.

Летняя школа в Сочи – ***с 3 по 17 июля*** – 0-9 класс.

Летняя школа в Подмосковье – ***со 2 по 25 августа*** – для 5–10 классов.

Большое внимание мы уделяем также нашим математическим классам на базе разных школ Москвы. В прошлом наши ученики завоевали более десятка золотых медалях на международных олимпиадах по математике и физике, информатике, астрономии, а также разнообразные призы и награды на других соревнованиях России и других стран. Не только старшеклассники получают награды на соревнованиях высокого уровня. Наши школьники показывают высокие результаты на турнирах матбоев, Математическом Празднике и других Олимпиадах.

Более подробно со всеми направлениями нашей работы в можете познакомиться на сайте.

Олимпиада 5 класса

Письменный тур.

Результаты письменного тура будут опубликованы ***после 24 февраля*** на нашем сайте. http://mathbaby.ru

Устный тур.

Устный тур пройдёт 19 марта. Место пока определяется. На него будут приглашены участники, показавшие высокий результат на письменном туре.