Краткие решения задач олимпиады 5 класса
28 января 2024
Часть А

К каждой задаче необходимо указать ответ.
Решения приводить не требуется.

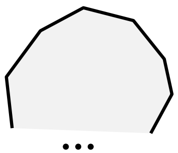
1. Никита выписал цифры сегодняшней даты 28.01.2024 в ряд и поставил в некоторые промежутки знаки арифметических действий и один знак равенства так, что получилось верное равенство. Приведите пример, как он мог это сделать: 2 8 0 1 2 0 2 4 (*Н.Михайловский*)

Ответ. Например, так: 28·0·1+2+0+2=4

2. Запишите какое-нибудь решение ребуса МЯЧ + МЯЧ = ГООЛ. Разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам − одинаковые цифры. (*Н.Михайловский*)

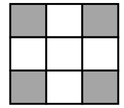
Решение. Буква Г = 1, поскольку даже если М=9, то максимальное двузначное число, какое может получиться при сложении, это 19. М и Я − «парные», то есть такие, что при сложении в разряде единиц будет одна и та же цифра. Причем, у суммы М есть переход через разряд, а у Я − нет. Какие вообще бывают такие пары: 6 и 1, 7 и 2, 8 и 3, 9 и 4. 5 и 0. 6 и 1 не подходит, так как уже Г=1. 5 и 0 не подходит, так как тогда две разные буквы будут соответствовать одной и той же цифре. Проверяя остальное, получаем варианты: **Ответ** 723+723=1446, 943+943=1886 и 832+832=1664.

3. Однажды семья Севы получила на заказ пиццу не круглой, а необычной «угловатой» формы, как на рисунке. Сева разрезал пиццу на два куска, проведя прямой разрез, соединив два угла. Подумал и еще раз разрезал один из кусков, соединив два угла. И так далее. До тех пор, пока не получилось 2024 треугольных кусочка пиццы. Сколько изначально было углов у пиццы? (*А.Бронников*)



Ответ. 2026. **Решение**. Заметим, что каждый раз рез увеличивает число кусочков пиццы на 1. Изначально была целая пицца, а стало 2024 куска. Значит, было сделано 2023 разреза. Каждым разрезом общее количество углов увеличивается на 2 (поскольку Сева режет из угла в угол). Поэтому за 2023 разреза углов стало больше на 2·2023, а с другой стороны их теперь 3·2024. Следовательно, у пиццы было 3·2024 − 2·2023 = 2026 углов.

4. У Виталика есть 26 чёрных и 26 белых кубиков размером 1×1×1. Он хочет выложить куб 3×3×3, использовав некоторые из этих кубиков, так, чтобы каждый чёрный кубик соприкасался гранями с чётным числом белых, а каждый белый соприкасался гранями с чётным числом чёрных. Покажите какой-нибудь вариант, как это возможно: (*Е.Иванова*)



Ответ. Один из вариантов в каждом слое угловые кубики чёрные, а остальные − белые.

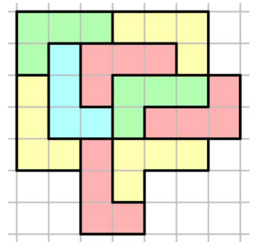
5. Кот в сапогах прибежал из деревни в город на четырёх лапах, а на обратный путь из города в деревню он затратил в два раза больше времени, т.к. часть пути бежал на трёх лапах, а остальную часть − шёл на двух лапах. Известно, что Кот идёт на двух лапах в 8 раз медленнее, чем бежит на четырёх, а его скорость на трёх лапах равна 3/4 от его скорости на четырёх. Какую часть пути он шёл на двух лапах? (*К.Мандельброт*)

Ответ. 1/10. **Решение.** Пусть Кот на трёх лапах бежал путь S_3, а на шёл на двух −S_2. В сумме это весь путь из города в деревню. Путь время, за которое кот пробегает эти промежутки на 4 лапах равны соответственно T_3 и T_2. Тогда на 3 лапах S_3 кот пробегает за $\frac{4}{3}T_3$, а на 2 лапах промежуток S_2 за $8T_2$. При этом $T_3 + T_2$ − это то время, которое Кот тратит при движении на 4 лапах на весь путь. По условию за $\frac{4}{3}T_3 + 8T_2 = 2(T_3 + T_2)$, откуда $T_3 = 9T_2$.

6. У робота Афанасия есть 120 маленьких кусочков пластилина. За одну секунду он может из четырёх или из шести кусочков слепить один новый. Какое наименьшее количество секунд понадобится Афанасию, чтобы слепить из всех 120 маленьких кусочков один большой кусок? (*В.Иванов*)

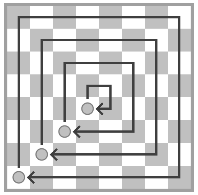
Ответ. 25 секунд. **Решение.** Заметим, что первая операция уменьшает количество кусочков на 3, а вторая − на 5. Нужно уменьшить общее количество кусочков на 119, то есть представить 119 в виде 3·N+5·M, где M и N − натуральные или 0, так чтобы их сумма была как можно меньше. Понятно, что N меньше 5. Поскольку, если оно равно 5 и более, то уменьшить на 15 кусочков вместо пяти операций по 3 можно тремя операциями по 5 и сумма M+N станет меньше. Проверим, что делится на 5: 119−3, 119−6, 119−9, 119−12. Подходит только 119−9. Значит операций первого вида только 3. Пример для такого набора операций легко строится.

7. Разрежьте фигуру на рисунке на 9 равных частей по линиям сетки (части можно поворачивать и переворачивать) (*В.Иванов*)



Ответ. на рисунке

8. На шахматной доске расположены 4 фишки, как показано на рисунке. Каждую минуту Глеб сдвигает каждую фишку на соседнюю клетку. Траектории фишек показаны на рисунке стрелками. Вернувшись на свою начальную клетку, фишка продолжает двигаться по той же траектории. Через сколько минут впервые снова получится исходная позиция? (*В.Иванов*)



Ответ. 420. **Решение.** Посчитаем для каждой фишки количество минут, которое требуется ей, чтобы вернуться в исходное положение. Это 4, 12, 20 и 28 минут. Чтобы исходная позиция повторилась, необходимо, чтобы каждая фишка прошла целое количество кругов. То есть количество прошедших минут должно делиться на 4, 12, 20 и 28. НОК этих чисел − 420

9. Пончик купил ящик с 2024 штуками мороженого-го и сразу начал его есть. Он ел по правилам: на завтрак одно мороженое, на обед два мороженых, а на ужин три мороженых. Он закончил очередную трапезу, и мороженое кончилось. Пончик ни разу не нарушил режим питания. Какой приём пищи у него был первым: завтрак, обед или ужин? (*О.Парамонова*)

Ответ. Обед. **Решение**. За полные сутки Пончик съедает 6 штук мороженого. Разделим 2024 на 6. Получается 337 с остатком 2. Значит у него хватило мороженого на полные 337 суток и еще какую-то трапезу из 2 мороженых. Значит это обед.

10. У Рона и Невилла есть волшебные артефакты: значки и фантики. Ребята совершили один обмен (значок на значок, фантик на фантик или фантик на значок). Известно, что после обмена тот, кто получает значок, начинает врать, а тот, кто получает фантик, начинает говорить правду. После обмена Рон заявил: «Я дал Невиллу значок». Невилл ответил: «Я дал Рону ...» А) Что сказал Невилл? Б) Что на что поменяли ребята? (*Е.Иванова*)

Ответ. А) «Я дал Рону значок» Б) Обменяли фантик на значок.

Решение. Пусть Рон сказал правду. Это значит, что сам он получил фантик. Тогда Невилл, отдав фантик и получив значок, должен врать и поэтому скажет, что дал значок. Если же Рон солгал, то на самом деле он дал Рону фантик и получил значок. Тогда Невилл, получив фантик, должен говорить правду и он скажет, что дал Рону значок.

Часть Б

В этой части кроме ответа требуется привести решение.

1. Сережа, Вася и Оля опоздали на репетицию бала. Когда они пришли, все остальные ученики 5Ю класса были на месте. Сережа пожал руку всем мальчикам и девочкам, Вася пожал руку только мальчикам, а Оля только девочкам. Друг другу опоздавшие руки не пожимали. Всего было сделано 48 рукопожатий. Сколько человек учится в 5Ю классе? (*А.Бронников*)

Ответ. 27 человек. **Решение**. Поскольку каждому мальчику пожали руку два раза (Вася и Сережа) и каждой девочке два раза (Оля и Сережа), то каждому из присутствовавших кроме Оли, Сережи и Васи пожали руку дважды. Значит, было 24 человека и плюс опоздавшие.

2. Винни-Пух, Ослик и Пятачок нашли в Зачарованном лесу сломанные весы со стрелкой и принялись взвешиваться. Винни-Пуху весы показали 17кг, Пятачку 6кг, а Ослику 12кг. Когда же они забрались на весы втроем, то весы показали 41кг. Сколько на самом деле весят Винни-Пух, Пятачок и Ослик по отдельности? (Весы каждый раз ошибаются на одно и тоже число килограммов в одну и ту же сторону) (*Е.Иванова*)

Ответ. Пятачок весит 9кг, Винни-Пух − 20кг, а Ослик − 15кг.

Решение. Поскольку весы каждый раз ошибаются на одно и то же число, то можно считать, что сначала встал Винни-Пух, а потом добавились Пятачок и Ослик, то есть разница между 17 и 41 − это настоящий суммарный вес Пятачка и Ослика. То есть П+О=24. Аналогично В+О=35 и П+В=29. Отсюда 2(П+О+В)=88, П+О+В=44 и весы показывают на 3кг меньше. Значит, Пятачок весит 9кг, Винни-Пух − 20кг, а Ослик − 15кг.

3. Никита задумал 1000 попарно различных 10-значных чисел. Теперь он хочет выписать все задуманные числа в ряд слева направо так, чтобы соседние числа в ряду отличались ровно одной цифрой (в одном и том же месте). Например, рядом могут стоять числа 1780 и 1080, но не могут 1780 и 1873. Он придумал 2023 разных способа выписать все числа на доску таким образом. Докажите, что существует и 2024-й способ это сделать. (*Н.Михайловский*)

Решение. Заметим, что общее количество способов создать такую последовательность чётно, ведь все последовательности можно разбить на пары переворотов каждого ряда чисел. Значит, общее количество способов не может быть равно 2023, ведь 2023 — нечётное число. Значит, существует еще как минимум 1 способ.

4. Саша, если услышит, как какая-то девочка солгала, тут же начинает в течение часа тоже лгать. Валя лжет целый час, если услышит, какой-то мальчик солгал. Однажды после часа тишины случился такой разговор: Женя: «Завтра выходной!» Саша: «Это неправда!» Валя: «Ну вот, опять вы все лжете…» Кто Женя − мальчик или девочка и будет ли завтра выходной? (*Е.Иванова*)

Комментарий в аудитории. В остальных случаях дети говорят правду. Имена Валя, Женя, Саша могут носить как мальчики, так и девочки)

Ответ. Женя − мальчик, завтра не выходной. **Решение**. Поскольку утверждения Жени и Саши противоречат друг другу, то кто-то из них точно лжет, а кто-то говорит правду. Значит, Валя точно лжет. Следовательно, кто-то среди Жени и Саши мальчик и именно он солгал, а второй человек (мальчик или девочка) сказал правду. Если солгал Саша, это значит, что Женя девочка и тоже солгала. Но такое не может быть. Значит, Саша в любом случае сказал правду. Тогда фраз Жени в любом случае ложна. И это мальчик, так как для того, чтобы солгал (или солгала) Валя нужно, чтобы солгал мальчик. Таким образом, Женя мальчик, он солгал и, следовательно, завтра не выходной. Заметим, что мы так и не узнали пол Вали и Саши.

5. У волшебника есть 6 абсолютно одинаковых на вид яблок. Он знает, что в четырёх из них по 4 косточки, а в двух − по 3 косточки. Волшебник может сложить некоторые яблоки (необязательно все) в две кучки и спросить мудрого Сфинкса, какова разница между количеством косточек в кучках. Сфинкс ответит только на один вопрос. Предложите такой расклад по кучкам, чтобы после ответа Сфинкса гарантированно узнать количество косточек хотя бы в одном яблоке. Укажите расклад и докажите, что количество косточек однозначно определяется. (*О.Парамонова*)

Решение. Сделаем две кучки такие: из двух яблок и из трёх. Посмотрим, какие могут быть варианты распределения косточек

1 кучка	2 кучка	разница
3 и 3	4, 4 и 4	6
3 и 4	4, 4 и 4	5
3 и 4	4, 4 и 3	4
4 и 4	4, 4 и 3	3
4 и 4	4, 3 и 3	2

Поскольку разница однозначно дает нам понять, какие яблоки мы выбрали, то однозначно определяется яблоко, какое мы оставили.

Критерии:

Каждый правильный ответ в части А стоит 2 балла, в задаче 10 2 балла стоит каждый пункт. В некоторых задачах можно было получить 1 балл за неполный ответ. В части Б оценивается решение – от 0 до 5 баллов.

Письменный тур.

Результаты письменного тура будут опубликованы ***после 24 февраля*** на нашем сайте. http://mathbaby.ru

Устный тур.

Устный тур планируется 24 марта. Место пока определяется. На него будут приглашены участники, показавшие высокий результат на письменном туре.