

**Министерство образования и науки
Республики Болгария**
XLIII Национальная олимпиада по математике
Заключительный этап, Второй день, 18 мая 2014 г.

4. Найдите все пары простых чисел, таких что

$$p^2 | q^3 + 1 \text{ и } q^2 | p^6 - 1.$$

5. Найдите все функции $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, такие что

$$f(xy) = f(x + y)(f(x) + f(y)), \text{ для всех } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

(Где \mathbb{Q}^+ и \mathbb{R}^+ означают соответственно множество положительных рациональных и множество положительных действительных чисел.)

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность k . Отрезки AC и BD пересекаются в точке E , а лучи CB^{\rightarrow} и DA^{\rightarrow} пересекаются в точке F . Докажите, что прямая проходящая через центры вписанных окружностей $\triangle ABE$ и $\triangle ABF$ и прямая проходящая через центры вписанных окружностей треугольников $\triangle CDE$ и $\triangle CDF$ пересекаются на окружности k .

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Время работы: 4 часа 30 минут.

Успехов!