

Решения^β

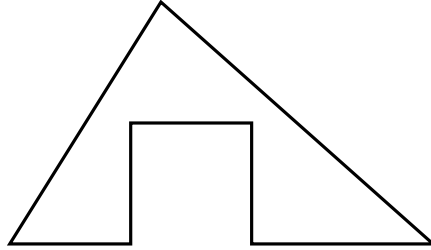
Довывод.

1. Маша составила два числа: в одном были только единицы и семерки, а в другом — только двойки и тройки, причем в каждом из чисел не все цифры были одинаковы. Могло ли так быть, что одно из этих чисел делится на другое?

Ответ: Да, могло.

Решение. К примеру, 323 делится на 17.

2. Гриша взял бумажный треугольник и вырезал из него квадрат (см. рисунок).



Известно, что периметр треугольника был равен 17, а периметр полученной фигуры 23. Найдите площадь новой фигуры, если площадь треугольника была равна 25.

Ответ: 16.

Решение. Т.к. периметр фигуры после вырезания квадрата увеличился на две стороны квадрата, то сторона квадрата равна $(23 - 17) : 2 = 3$. Значит, площадь квадрата равна $3 \cdot 3 = 9$, но тогда площадь полученной фигуры равна $25 - 9 = 16$.

3. На поляне собрались несколько больших и несколько маленьких барсуков (причем были и те, и другие). Каждый большой барсук сказал, что маленьких барсуков больше двух, а каждый маленький — что больших больше двух. Сколько барсуков могли сказать неправду?

Ответ: 0, а также любое число, большее 1.

Решение. Заметим, что в каждом из видов барсуков либо все сказали правду, либо все — неправду. Приведем пример, когда все сказали правду: 3 больших и 3 маленьких барсука. Теперь докажем, что не могло быть так, что ровно один барсук сказал неправду. Тогда бы барсуков этого вида было бы ровно 1 штука, а другого вида было не больше двух, а, значит, еще как минимум один солгавший. Покажем, что любое другое число солгавших быть могло. Пример для $i (i > 2)$ солгавших: 1 барсук 1-го вида и i барсуков 2-го вида. Пример для 2 солгавших: 1 барсук 1-го вида и 1 барсук 2-го вида.

4. Когда троллейбус выехал из автобусно-троллейбусного парка, то троллейбусов в парке осталось $1/4$ от всего транспорта в нем. Но когда троллейбус вернулся в парк, троллейбусы стали составлять уже треть всего транспорта. Сколько автобусов было в парке, если известно, что пока троллейбус следовал по маршруту, ни один автобус и ни один троллейбус не выехал и не въехал в парк?

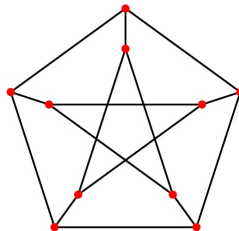
Ответ: 6.

Решение. Все троллейбусы без выехавшего составляют треть количества автобусов. А все троллейбусы составляют половину всех автобусов. Тогда один троллейбус составляет $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ от количества автобусов. Значит автобусов было 6.

5. Существует ли компания из 10 человек такая, чтобы у каждого человека было ровно три знакомых и у любых двух незнакомых был ровно один общий знакомый?

Ответ: Да, существует.

Решение. Пример см. на рисунке ниже. Точками изображены люди, ребро между точками означает, что люди, соответствующие точкам, знакомы.



Вывод

6. В футбольном турнире, проходящем в два этапа, участвуют 16 команд. В первом этапе все команды играют между собой двухкруговой турнир (каждая команда с каждой играет два матча). Во втором этапе первые восемь команд

играют между собой двухкруговой турнир, и последние восемь команд играют между собой двухкруговой турнир. Какая наибольшая разница очков может быть между очками первой команды первой восьмерки, и первой команды второй восьмерки в конце турнира, если за победу в каждом матче дается 3, за ничью 1 и за поражение 0 очков(очки после первого этапа сохраняются)?

Ответ: 104.

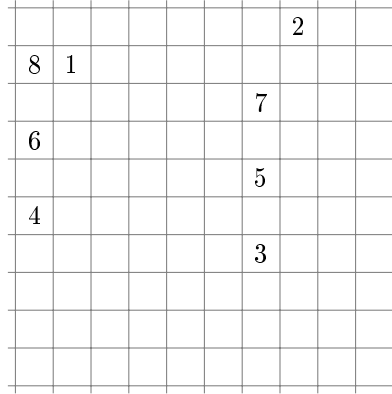
Решение. Рассмотрим турнир, в котором первые 30 туров сыграны произвольно. Посмотрим на команды в верхней половине и в нижней. Пусть если в данный момент «верхняя» команда не выиграла у «нижней», то переиграем матч, так чтобы выиграла. Так сделаем для любых двух команд. Заметим, что в результате таких действий ни одна команда из нижней половины таблицы не поднимется в верхнюю и ни одна команда из верхней половины не опустится в нижнюю. Также сделаем так, чтобы первая команда все матчи выиграла. Теперь рассмотрим последние восемь команд. Заметим, что эти команды за все 44 тура набрали в сумме очков минимум $8 \cdot 28$, тогда первая из них набрала минимум 28. В то же время первая команда первой восьмерки могла набрать $3 \cdot 30 + 14 \cdot 3 = 132$ — а это максимально возможное число очков. Значит, наибольшая возможная разность $132 - 28 = 104$.

7. N -конем назовем фигуру, которая ходит буквой Г со сторонами 1 и N . Найдите все такие N , что на бесконечной доске несколькими ходами N -коня можно пройти из любой клетки в любую другую.

Ответ: Все четные числа.

Решение. Сначала покажем, что нечетные N не годятся. Действительно, покрасив доску в шахматную раскраску, заметим, что при ходе N -коня не меняет цвет поля. Значит, попасть на клетку другого цвета не удастся.

Теперь покажем, что для любого четного N можно попасть на любое другое поле. Для этого достаточно научиться попадать на соседнюю клетку. Покажем, как попасть на соседнюю по горизонтали клетку. На картинке показано, как это сделать для $N = 6$. Аналогично можно сделать для любого четного N .



8. В школе работает несколько секций, в каждой не более 15 мест. Известно, что для любых 16 секций найдется ученик, который записался во все эти секции. Докажите, что тогда есть ученик, который записался во все секции.

Решение. Рассмотрим некоторую секцию A . Если утверждение задачи неверно, то для любого ученика из этой секции найдется секция, в которой он не занимается. Тогда все эти секции вместе с A образуют набор из не более, чем 16 секций, не имеющих общих учеников. Дополнив их любыми секциями до 16, получим набор из 16 секций, противоречащий условию задачи.

9. Иван нарисовал пятиугольник и в его вершинах написал 5 различных натуральных чисел. Затем на каждой стороне этого пятиугольника он написал наименьшее общее кратное чисел, написанных в вершинах этой стороны и заметил, что все записанные на сторонах пять чисел равны. Какое наименьшее число Иван мог написать на сторонах?

Ответ: 30.

Решение. Если в вершинах написать числа (2, 15, 6, 10, 30), число, записанное на сторонах, равно 30. Объясним, почему меньшее число получится не может. Докажем, что число на сторонах имеет как минимум три различных делителя (когда оно минимально). Очевидно, оно не могут иметь только один простой делитель, предположим что оно имеет ровно два простых делителя p и q . Пусть число, записанное на сторонах, равно $p^a q^b$. Тогда одно из двух соседних чисел в вершинах делится на p^a , откуда вытекает наличие как минимум трех чисел кратных p^a . Эти три числа различны, поэтому наибольшие степени q , делящие их, различны, что дает оценку $b \geq 2$. Аналогично $a \geq 2$, тогда $p^a q^b \geq 2^2 3^2 > 30$, противоречие. Значит, как минимум три различных простых делят числа, но тогда наименьшее общее кратное равно $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.