Олимпиада по алгебре и теории чисел

***для профи**, 16 ноября 2013 г.*

1. В урне лежат 100 карточек, на которых написаны их номера: 00, 01, 02, …, 99. Из урны вынули пять карточек так, что ни одна цифра не повторилась дважды, а из их номеров выбрали средний по величине (то есть такой, что из остальных номеров два его больше и два меньше). Какой наибольший номер это может быть?

2. Найдите все положительные решения уравнения $\{x\} = \{\frac{x}{2013}\}$.

3. Целые числа a, b, c удовлетворяют условию

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

Докажите, что число $a^2 + b^2 + c^2$ — точный квадрат.

4. Функция f определена на множестве $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, принимает вещественные значения и удовлетворяет условию

$$f(x+y) = f(x)f(y) + 1, \text{ при } x, y, x+y \in S.$$

Найдите наибольшее возможное значение n.

5. Натуральные числа a, b, c, d, n удовлетворяют условиям $a + c < n$ и $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1 - \frac{1}{n^2}.$$

6. Произведение положительных чисел a и b не меньше 1. Докажите, что

$$\frac{1}{(2a+3)^2} + \frac{1}{(2b+3)^2} \geqslant \frac{2}{5(2ab+3)}.$$

7. Найдите все натуральные n, для которых оба числа $n + 3$ и $n^2 + 3n + 3$ — точные кубы.

8. Докажите, что для любого $n \geqslant 2$ существует такой набор из n натуральных чисел, что для любых двух разных чисел a, b из этого набора $a^2 + b^2$ делится на $a - b$.