



Олимпиада по алгебре и теории чисел

для стажеров, 16 ноября 2013 г.

1. В урне лежат 100 карточек, на которых написаны их номера: 00, 01, 02, ..., 99. Из урны вынули пять карточек так, что ни одна цифра не повторилась дважды, а из их номеров выбрали средний по величине (то есть такой, что из остальных номеров два его больше и два меньше). Какой наибольший номер это может быть?

2. Можно ли записать числа 1, 2, 3, ..., 2013 в строчку в некотором порядке так, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих через одно, делилась на 7?

3. При каких n сумма всех n -значных чисел оканчивается ровно 2013 нулями?

4. Существуют ли такие цифры a и b , для которых число

$$\underbrace{aa \dots a}_{b \text{ цифр}} - \underbrace{bb \dots b}_{a \text{ цифр}}$$

является простым?

5. Докажите, что при всех $n > 1$ полосу $4 \times 3n$ можно выложить уголками вида



так, чтобы любая прямая, пересекающая полосу, пересекала хотя бы один уголок.

6. На доске написано выражение

$$1 * 2 * 3 * \dots * 98 * 99.$$

Два игрока по очереди заменяют по одной звёздочке на знак сложения или умножения. Игра заканчивается, когда звёздочек не остаётся. Если полученный результат нечётен, то выигрывает первый игрок, в противном случае — второй. Кто выиграет при правильной игре?

7. Натуральные числа a, b, c, d, n удовлетворяют условиям $a + c < n$ и $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1 - \frac{1}{n^2}.$$