Задачи IV турнира математических боёв

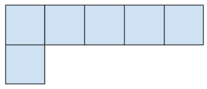
Содержание

1 Лига 4 класса

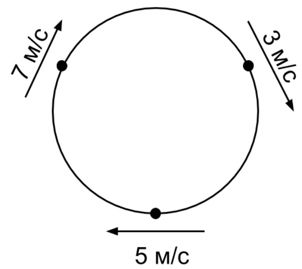
Первый тур

17 ноября 2019 г.

Задача 1. Какое наибольшее количество шестиклеточных сапожков можно вырезать из клетчатого прямоугольника 7×7? *(Н. А. Михайловский)*

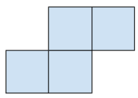


Задача 2. Три бегуна находятся на круговом стадионе длиной 300 метров, при этом каждый бегун находится на одинаковом расстоянии от двух других бегунов. Они начинают бежать по часовой стрелки со скоростями 3 м/с, 5 м/с и 7 м/с соответственно, при этом бегуны расположены так, как на рисунке. Через какое время они впервые окажутся в одной точке стадиона? *(Н. А. Михайловский)*



Задача 3. Известно, что в семье не более 40 детей. Каждому из детей в семье задали вопрос: «Во сколько раз у тебя больше братьев, чем сестер?» Были получены несколько ответов «в 7 раз» и несколько ответов «в 5 раз», при этом все дети сказали правду. Какое количество мальчиков может быть в этой семье? *(Н. А. Михайловский)*

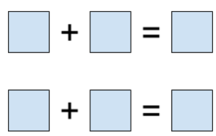
Задача 4. Доску 11×11 заполняют числами от 1 до 121 по следующему правилу: в первой строке слева направо записаны числа от 1 до 11 в порядке возрастания, во второй слева направо от 12 до 22 в том же порядке и так далее. Может ли быть сумма в клетках, образующих Z-тетрамино, быть равна 222? (Z-тетрамино можно как угодно поворачивать и переворачивать.) *(К. Н. Бондаренко, по мотивам задачи дистанционного этапа XI олимпиады Эйлера)*



Задача 5. Вокруг большой лужи встали 20 жителей острова рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут) и посмотрели на неё. Потом каждый из 20 людей грустно сказал: «Среди следующих трёх людей справа от меня по кругу есть хотя бы 2 рыцаря». Сколько среди них было рыцарей? *(Н. А. Михайловский)*

Задача 6. В наличии имеется мягкая веревка длиной 1 м и деревянная палочка длиной 7 см. Докажите, что с помощью этих инструментов можно отмерить любую длину от 11 до 17 см, выраженную целым числом сантиметров. *(Н. А. Михайловский)*

Задача 7. Есть 2 примера на сложение двух чисел. В каждый квадратик разрешается вписать любое натуральное число. Когда все 6 чисел вписаны (в обоих примерах вписаны оба слагаемых и сумма), игроки выясняют, сколько примеров на доске являются верными. Если хотя бы один пример верен, то выигрывает второй игрок, иначе выигрывает первый игрок. Кто выиграет и как ему нужно играть? *(Н. А. Михайловский, К. Н. Бондаренко)*



Задача 8. Какие цифры могут быть заменены буквой Ь во всех решениях ребуса: АЛЬФА + АЛЕФ = ФИЛИН. (Одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, разными — разные.) *(Н. А. Михайловский, К. Н. Бондаренко)*

Второй тур

18 ноября 2019 г.

Задача 9. В семье 6 детей. Каждому задали вопрос: «Сколько у тебя братьев?» Они ответили следующее. Саша: «У меня 1 брат». Валя: «У меня 2 брата». Слава: «У меня 4 брата». Паша: «У меня 4 брата». Женя: «У меня 5 братьев». Вася: «У меня нет братьев». При ответе на вопрос мальчики соврали, а девочки сказали правду. Сколько в семье сыновей и как их зовут? (Все имена: Саша, Валя, Слава, Паша, Женя, Вася могут быть как женскими, так и мужскими.)

(Н. А. Михайловский)

Задача 10. Есть 4 монеты. Некоторые из них настоящие, некоторые фальшивые. Настоящие весят одинаково, фальшивые одинаково, настоящие тяжелее фальшивых. Есть двухчашечные весы без гирь. В весах живет весёлый гнум. Каждый раз перед тем, как весы покажут результат взвешивания, он одну из монет (может даже которая не на чашах весов) меняет (то есть из фальшивой превращает в настоящую, из настоящей превращает в фальшивую). Но он никогда не делает так, что все монеты станут фальшивыми. Найдите с помощью этих весов хотя бы одну настоящую монету. *(Н. Л. Чернятьев)*

Задача 11. В понедельник Кузя шел в школу со скоростью 4 км/ч и опоздал на 2 минуты. Во вторник он ехал на электросамокате со скоростью 12 км/ч и успел вовремя. На сколько он опоздает в среду, если неспешно пойдет в школу со скоростью 2 км/ч? *(Н. А. Михайловский)*

Задача 12. На столе лежит 2019 шишек. Двое по очереди делают ходы. За один ход разрешается взять со стола 2 или 9 шишек. Тот, кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто из игроков может гарантировать себе победу вне зависимости от действий противника?

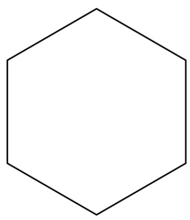
(Н. А. Михайловский)

Задача 13. Имеется клетчатая полоска $1 \times N$. В каждую клетку надо вписать одну из трех цифр $1, 2, 3$ так, чтобы для любой клетки, в которой записана цифра 1, нашлась клетка ровно через одну клетку от нее, в которой записана цифра 2; для каждой клетки, в которой записана цифра 2, нашлась клетка ровно через две клетки от нее, в которой записана цифра 3; для каждой клетки, в которой записана цифра 3, нашлась клетка, ровно через три клетки от нее, в которой записана цифра 1. Можно ли это сделать для $N = 11$? *(Н. Л. Чернятьев)*

Задача 14. Квадрат 11×11 разбит на квадраты 4×4 и прямоугольники 1×3 или 3×1. Докажите, что в большом квадрате найдётся ряд (строка или столбец), пересекающий нечётное (не делящееся на 2) число фигур разбиения. *(А. С. Голованов)*

Задача 15. Можно ли разрезать правильный 6-угольник (см. рисунок) на 12 треугольников так, чтобы каждый треугольник имел общий отрезок границы ровно с 3 другими треугольниками?

(Н. А. Михайловский)



Задача 16. В рыбалке участвовали 7 рыбаков. Любые двое из них поймали различное количество рыбок. Кроме того, оказалось, что любые трое из них поймали вместе не менее 13 рыбок. Какое наименьшее число рыбок могли в сумме поймать все семеро рыбаков?

(А. С. Голованов)

Третий тур

19 ноября 2019 г.

Задача 17. Поезд длиной 78 метров проезжает мост длиной 13 метров за 3 минуты 9 секунд. На станции решили собрать новый поезд, длина которого в 2 раза меньше, за счет чего его скорость будет в 2 раза выше. За какое время новый поезд проедет этот же мост? *(Н. Л. Чернятьев)*

Задача 18. В строку выписаны натуральные числа. Известно, что каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предшествующих. Десятое число в ряду равно 2019. Может ли оказаться, что сороковое число равно 1000000? *(А. С. Голованов)*

Задача 19. Среди 10 школьников есть правдолюбы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из этих школьников выбрал 5 других и обозвал каждого из них лжецом. Сколько среди этих школьников может быть правдолюбов? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет. *(А. С. Голованов)*

Задача 20. Костя решил придумать число, в котором все цифры различны, при этом соседние цифры отличаются не меньше, чем на 5. У него получилось число 27093. А каково наибольшее число с таким свойством? *(Н. Л. Чернятьев)*

Задача 21. Никита участвовал в странном тесте, где у каждого из 40 вопросов было 2 варианта ответа. В каждом вопросе можно было указать один из вариантов ответа, а можно было вовсе не давать ответа. За правильный ответ на вопрос начисляется 7 баллов, а за неверный ответ на вопрос вычитается 10 баллов. Если ответ на вопрос не дан, то вы получаете 0 баллов. Известно, что Никита набрал в этом тесте 111 баллов и при этом хотя бы раз дал неверный ответ на вопрос. На сколько вопросов теста Никита ответил верно? *(Н. А. Михайловский)*

Задача 22. Среди шести одинаковых на вид монет одна или две фальшивые, при этом фальшивые монеты весят одинаково (если их две) и все настоящие монеты весят одинаково. С помощью двухчашечных весов без гирь найдите все настоящие монеты не более чем за 3 взвешивания. *(Фольклор)*

Задача 23. Существуют ли такие натуральные числа a и b, что сумма цифр каждого из чисел a, b и $a+b$ равна 909? *(Фольклор)*

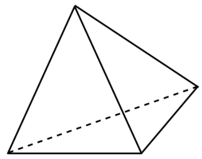
Задача 24. Таблица 3×3 заполнена числами, как показано на рисунке. Разрешается поменять местами числа в любых двух клетках, имеющих общую сторону. Можно ли, действуя таким образом, добиться того, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце делилась на 3? *(А. С. Голованов)*

7	2	4
5	7	7
4	1	8

Четвертый тур

20 ноября 2019 г.

Задача 25. В каждую из четырех вершин тетраэдра (см. рисунок) Никита написал натуральное число. Потом пришла Катя и посчитала для каждой грани этого тетраэдра сумму трех чисел в вершинах этой грани. Могли ли у Кати получиться числа 2017, 2019, 2021 и 2023? *(Н. А. Михайловский)*



Задача 26. Том может покрасить один забор за 8 часов, а Гек за 12 часов. Том и Гек решили вместе покрасить 5 заборов. От осознания объёма работы, которую они в итоге выполнили за 5 суток непрерывной работы, их работоспособность упала в несколько раз. Во сколько раз упала их работоспособность? *(Н. А. Михайловский)*

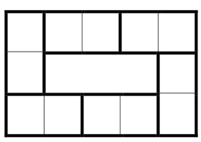
Задача 27. Можно ли в каждую клетку квадрата 4×4 записать одну из цифр $1, 2, 3$ или 4 так, чтобы в клетках любой фигуры Т-тетрамино, расположенной внутри этого квадрата, не было одинаковых цифр? *(Н. А. Михайловский)*

Задача 28. Однажды на турнире Нёпиуза завтрак проходил в необычном формате. На очень большом столе по кругу было расставлено 200 тарелок, в каждой тарелке была каша одного из 20 видов, при этом тарелок с кашей каждого вида было ровно по 10 штук. Докажите, что можно выбрать 90 подряд идущих в кругу тарелок так, чтобы выбранные тарелки содержали каши хотя бы 10 различных видов. *(Н. А. Михайловский)*

Задача 29. Вася посетил математический турнир и рассказал, что там было 2018 участников (Вася – один из 2018), и каждому из них среди остальных участников были знакомы ровно один мальчик и ровно одна девочка. Докажите, что Вася что-то напутал. *(А. С. Голованов)*

Задача 30. Лёлик разделил шоколадку 6×6 на несколько частей. Болик заметил, что если теперь провести любую прямую линию длины 6 по линиям сетки от края до края шоколадки, то она разделит на 2 части хотя бы три фигуры из разбиения Лёлика. Покажите хотя бы одно возможное разбиение Лёлика. *(Н. Л. Чернятьев, Н. А. Михайловский)*

Задача 31. Из комплекта домино потеряли все дубли, после чего из оставшихся костей выбрали 6 и составили замкнутую цепь, в которой кости лежали по правилам домино (см. рисунок). Найдите наименьшее возможное суммарное количество точек на всех доминошках цепи. *(Фольклор)*



Задача 32. У нумизмата есть 8 одинаковых на вид монет, которые весят соответственно 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 граммов. Также в наличии имеются испорченные двухчашечные весы, которые показывают верный результат взвешивания только в том случае, если разница весов на чашках превышает 4 грамма, если же разница весов меньше либо равна 4 граммов, то весы остаются в равновесии. Как с помощью этих весов определить вес каждой из монет? *(Н. А. Михайловский)*

Пятый тур

20 ноября 2019 г.

Задача 33. Все натуральные числа от 1 до 2019 покрашены в один из двух цветов: белый или черный. Если числа a и b из этого набора покрашены в один цвет, то цвет числа $a - b$ (где $a > b$) совпадает с цветом числа a. Сколько всего существует таких различных раскрасок? *(Фольклор)*

Задача 34. Можно ли в каждую клетку таблицы 9×9 написать натуральной число так, чтобы: сумма чисел в первой строке этой таблицы отличалась на 1 от суммы чисел в первом столбце это таблицы; сумма чисел во второй строке этой таблицы отличалась на 2 от суммы чисел во втором столбце этой таблицы; …сумма чисел в девятой строке этой таблицы отличалась на 9 от суммы чисел в девятом столбце этой таблицы? *(Н. А. Михайловский)*

Задача 35. Антонио, спускаясь по эскалатору, движущемуся вниз, прошел 134 ступени. А бегущий в 3 раза быстрее Борисио прошел 201 ступеньку, спускаясь по этому же эскалатору. Флегматичный Вованио никуда не торопился и неподвижно прокатился на этом же эскалаторе вниз. Во сколько раз Вованио дольше Антонио спускался на этом эскалаторе? *(Фольклор)*

Задача 36. Имеется четыре кубика с рёбрами 1 см, 2 см, 3 см и 5 см. Можно ли собрать из этих кубиков фигуру, у которой площадь поверхности составляет менее $200\,\text{см}^2$? Кубики можно ставить друг на друга гранями. Фигура не должна распадаться на несколько не связанных между собой частей *(Фольклор)*

Задача 37. Коля нарисовал клетчатый квадрат $N \times N$. При каких значениях N этот квадрат можно разрезать на несколько (больше нуля) прямоугольников 1×4 (прямоугольники можно поворачивать) и один квадрат 1×1? *(Н. А. Михайловский)*

Задача 38. У Никиты есть 5 гирек, любые две из которых имеют разную массу. Назовем тройку гирек «интересной», если масса одной из гирек этой тройки равна сумме масс двух оставшихся гирек этой тройки. Какое наибольшее количество «интересных» троек может быть в наборе? *(Н. А. Михайловский)*

Задача 39. Мог ли Никита на клетчатой доске размером 6×6 закрасить ровно половину клеток так, чтобы внутри любого квадрата 3×3 этой доски было четное количество закрашенных клеток? *(Н. А. Михайловский)*

Задача 40. Лёлику и Болику дали решить пример на умножение двух натуральных чисел. К сожалению, на типографии произошел брак — в учебнике последняя цифра одного из чисел плохо пропечаталась, её было сложно разобрать. Лёлик посчитал, что последняя цифра равна 8, и получил ответ, отличающийся от правильного на 16144. Болик подумал, что там не пропечаталась цифра 3, и получил ответ, отличающийся от правильного на 6054. Какая цифра, на самом деле, плохо пропечаталась? *(Н. А. Михайловский)*

Шестой тур

21 ноября 2019 г.

Задача 41. В пяти кучках лежит соответственно $1, 1, 1, 1$ и 4321 камень. Разрешается выбрать любые четыре кучки из этих пяти, разбить эти четыре кучки на две пары, и в каждой паре переложить 1 камень из одной кучки в другую. Можно ли такими операциями сделать так, чтобы во всех кучках было поровну камней? *(Н. А. Михайловский, Н. Л. Чернятьев)*

Задача 42. Крош и Ёжик по очереди (начинает Крош) ставят в клетки таблицы 5×5 натуральные числа от 1 до 25 (каждое число можно использовать только один раз, в клетку можно ставить только одно число). Если после заполнения таблицы найдётся строка или столбец с суммой чисел 70, выигрывает Крош, в противном случае — Ёжик. Кто выиграет при правильной игре? *(А. С. Голованов)*

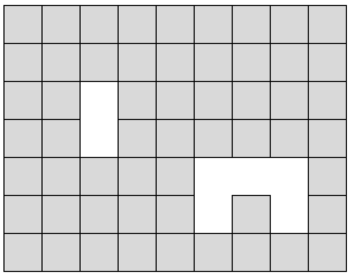
Задача 43. Найдите наибольшее натуральное число, в десятичной записи которого нет нулей и одинаковых цифр, при этом для любых двух цифр этого числа верно, что одна из цифр нацело делится на вторую. *(Н. А. Михайловский)*

Задача 44. Очередную олимпиаду решили провести по странным правилам: от 99 городов на олимпиаду отправляют по 2 участника – мальчика и девочку. После этого все 198 участников пытаются сесть за один круглый стол так, чтобы между любыми двумя детьми из одного города в круге сидели ровно 3 других участника. Докажите, что рассадить таким образом участников не получится. *(Н. А. Михайловский)*

Задача 45. В ряд лежит 10 монет, среди них 8 настоящих и 2 фальшивые, причем фальшивые монеты лежат рядом и весят одинаково (настоящие монеты тоже весят одинаково). Фальшивые монеты весят легче настоящих. Как за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь найти обе фальшивые монеты? *(Фольклор)*

Задача 46. Из Солнечного города в Изумрудный вышел Василий Иванович. Одновременно с ним из Изумрудного города в Солнечный выехал на велосипеде почтальон Печкин. Их встреча произошла в 1 км от Солнечного города. Если бы расстояние между городами было на 2 км больше, то их встреча произошла бы в 1500 метрах от Солнечного города. Во сколько раз скорость почтальона Печкина больше скорости Василия Ивановича? *(Н. Л. Чернятьев)*

Задача 47. Из прямоугольника 7х9 вырезан прямоугольник 1×2 и фигура пентамино как показано на рисунке. Разрежьте получившуюся фигуру по линиям сетки на две одинаковые фигуры. (Напоминаем, что фигуры называются одинаковыми, если они совпадают при наложении!) *(Н. А. Михайловский)*



Задача 48. На острове лжецов и рыцарей ровно один житель сказал: «Есть лжец выше меня», ровно двое жителей сказали: «Есть хотя бы двое лжецов выше меня», …, ровно 10 жителей сказали: «Есть хотя бы 10 лжецов выше меня». Известно, что все островитяне — разного роста, и каждый житель высказался ровно один раз. Сколько лжецов живёт на острове? (Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут.) *(Фольклор)*

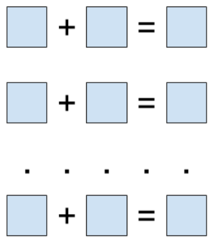
2 Лига 5 класса

Первый тур

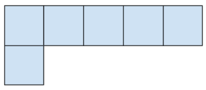
17 ноября 2019 г.

Задача 49. Иннокентий придумал числовой ребус: АЛЬФА + АЛЕФ = ФИЛИН (Одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, разными — разные.) Найдите все решения ребуса и объясните, почему других решений нет.

Задача 50. На доске написано N примеров на сложение двух чисел. Двое играют в игру: каждым ходом в один из свободных квадратиков разрешается вписать любое натуральное число или 0. Когда все $3N$ чисел вписаны (во всех N примерах вписаны оба слагаемых и сумма), игроки выясняют, сколько примеров на доске являются верными. Если хотя бы один пример верен, то выигрывает второй игрок, иначе выигрывает первый игрок. При каких значениях N второй игрок может гарантировать себе победу вне зависимости от действий первого игрока?



Задача 51. Какое наибольшее количество шестиклеточных сапожков можно вырезать из клетчатого прямоугольника 7×12?

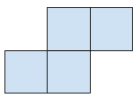


Задача 52. Может ли произведение нескольких (больше одного) последовательных натуральных чисел быть равно $99\ldots992$ (2019 девяток и 1 двойка)?

Задача 53. Три бегуна находятся на круговом стадионе длиной 300 метров, при этом каждый бегун находится на одинаковом расстоянии от двух других бегунов. Они начинают бежать против часовой стрелки со скоростями 3 м/с, 5 м/с и 7 м/с. Через какое время они впервые окажутся в одной точке стадиона?

Задача 54. 2019 детей встали в хоровод, каждый из них был в кепке одного из трёх цветов: белого, синего или красного. Неожиданно прибежали несколько котят и сели между детьми таким образом: если рядом стояли двое детей в кепках разных цветов, то между ними сели 1, 2 или 3 котёнка (1 котёнок между детьми в белой и синей кепках, 2 котёнка между детьми в красной и синей кепках, 3 котёнка между детьми в белой и красной кепках). Между парами детей в одноцветных кепках котята не сели. Могло ли всего между детьми сесть 2019 котят?

Задача 55. Доску 11×11 заполняют числами от 1 до 121 по следующему правилу: в первой строке слева направо записаны числа от 1 до 11 в порядке возрастания, во второй — слева направо от 12 до 22 в том же порядке, и так далее. Может ли сумма в клетках, образующих Z-тетрамино, быть равной 244? (Z-тетрамино можно как угодно поворачивать и переворачивать.)



Задача 56. В наличии имеется мягкая веревка длиной 1 метр и деревянная палочка длиной 7 см. Докажите, что с помощью этих инструментов можно отмерить любую длину от 11 до 17 см, выраженную целым числом сантиметров.

Второй тур

18 ноября 2019 г.

Задача 57. В рыбалке участвовали 7 рыбаков. Никакие двое из них не поймали одинаковое количество рыбок. Кроме того, оказалось, что любые трое из них поймали вместе не менее 13 рыбок. Какое наименьшее число рыбок могли поймать все семеро рыбаков?

Задача 58. Есть 4 монеты. Некоторые из них настоящие, некоторые фальшивые. Настоящие весят одинаково, фальшивые одинаково, настоящие тяжелее фальшивых. Есть двухчашечные весы. В весах живет Весёлый Гнум. Каждый раз перед тем, как весы покажут результат взвешивания, он одну из монет (может даже которая не на чашах весов) меняет (то есть из фальшивой превращает в настоящую, из настоящей превращает в фальшивую). Но он никогда не делает так, что все монеты станут фальшивыми. Нужно найти хотя бы одну настоящую монету. Можно ли это сделать?

Задача 59. Имеется полоска $1 \times N$. В каждую клетку надо вписать одну из трех цифр 1, 2, 3 так, чтобы для любой клетки, в которой записана цифра 1, нашлась клетка ровно через одну клетку от нее, в которой записана цифра 2, для каждой клетки, в которой записана цифра 2, нашлась клетка ровно через две клетки от нее, в которой записана цифра 3, а для каждой клетки, в которой записана цифра 3, нашлась клетка, ровно через три клетки от нее, в которой записана цифра 1. Докажите, что это можно сделать для любых N больших 15.

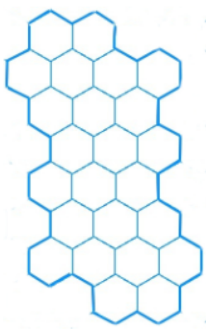
Задача 60. В понедельник Кузя шел в школу со скоростью 6 км/ч и опоздал на 2 минуты. Во вторник он бежал со скоростью 10 км/ч и успел вовремя. На сколько он опоздает в среду, если будет идти со скоростью 4 км/ч? (Кузя выходит в школу всегда в одно и то же время. Уроки начинаются тоже всегда в одно и то же время)

Задача 61. В кемпинг заехали туристы. На обед каждый из них съел половину банки супа, треть банки тушенки и четверть банки фасоли. Всего они съели 156 банок еды. Сколько было туристов?

Задача 62. 2019 человек, каждый из которых — рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжёт, выстроились в шеренгу. Затем каждый из них сказал: «Количество лжецов слева от меня больше, чем количество рыцарей справа от меня». Сколько в этой шеренге лжецов?

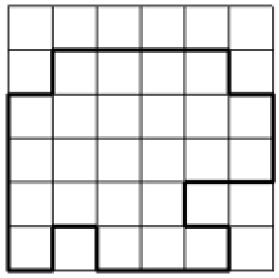
Задача 63. На головах четырехглавого дракона однажды утром выросли волосы: на первой голове 100 волос, на второй — 5, на третьей — 28, на четвертой — 39 (до этого утра ни на одной из голов никаких волос не было). За один раз дракон может вырвать три волоса с любой своей головы, но тогда на трех других головах вырастает по одному волосу. Дракон хочет сделать, чтобы на всех головах оказалось одинаковое количество волос. Сможет ли он это сделать?

Задача 64. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на четыре равные части. Резать можно только по линиям сетки.



Третий тур

19 ноября 2019 г.



Задача 65. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на три одинаковые части. Резать можно только по линям сетки.

Задача 66. Поезд проезжает мост, который в 6 раз длиннее его, за 112 секунд. За какое время проедет этот мост поезд, который в два раза длиннее, но едет со скоростью в два раза больше?

Задача 67. В строку выписаны целые числа. Известно, что каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предшествующих, и двадцатое число равно 2019. Может ли оказаться, что сороковое число равно 20202020?

Задача 68. В классе поровну мальчиков и девочек, всего 24 человека. Каждый мальчик написал, сколько в классе девочек выше его, а каждая девочка написала, сколько в классе мальчиков ниже её. Оказалось, что все написанные числа не меньше четверти числа учеников в классе. Докажите, что суммарный рост девочек в классе больше суммарного роста мальчиков.

Задача 69. На острове живет 29 рыцарей и лжецов. В утро вторника они произнесли следующие фразы: первый — «Среди нас можно выбрать группу из двух людей, среди которых лжецов будет больше, чем рыцарей», второй — «Среди нас можно выбрать группу из трех людей, среди которых лжецов будет больше, чем рыцарей», ..., двадцать шестой — «Среди нас можно выбрать группу из 27 людей, среди которых лжецов будет больше, чем рыцарей». А трое промолчали. Сколько рыцарей может быть среди них? (Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда врут.)

Задача 70. У визиря Альмара в молодильных яблоках завелся червячок. Всего яблок у него 9 и лежат они по кругу в специальной коробке Для-Молодильных-Яблок. Чтобы его найти Альмар решил воспользоваться чашечными весами. Он знает, что все яблоки весят одинаково, но то яблоко, в котором сейчас находится червячок, тяжелее. Есть небольшая проблема, связанная с тем, что после каждого взвешивания яблоки надо возвращать обратно в коробку, каждое на то самое место, на котором оно до этого и лежало. А после того, как Альмар возвращает яблоки в коробку, червячок сразу же незаметно переползает в одно из двух соседних с ним яблок (и живет там до следующего взвешивания). Помогите визирю Альмару найти червивое яблоко.

Задача 71. Костя решил придумать число, в котором все цифры различны, при этом соседние цифры отличаются не меньше, чем на 5. У него получилось число 27093. А каково наибольшее число с таким свойством?

Задача 72. Квадрат разрезан на меньшие, не обязательно равные, квадраты с целыми периметром. Докажите, что периметр исходного квадрата — также целое число.

Четвёртый тур

20 ноября 2019 г.

Задача 73. Харпо нашёл у себя в кармане не совсем обычные часы. Они идут либо в два раза быстрее обычных (то есть правильных часов), либо в два раза медленнее. А именно, смена скорости происходит каждый раз, когда время, которое они показывают, совпадает с правильным временем. В воскресенье в полночь они показывали правильное время и пошли в два раза быстрее. Какое время они будут показывать в среду в 11:40?

Задача 74. Найдите наименьшее натуральное число, у которого есть три разных собственных делителя с суммой 1001. (Собственный делитель числа — это его натуральный делитель, отличный от 1 и самого числа.)

Задача 75. По кругу сидят 2019 рыцарей и лжецов. Каждый из них заявил, что его соседи — лжец и рыцарь, но 4 рыцаря при этом ошиблись. Сколько в круге лжецов? (Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда говорят неправду.)

Задача 76. Клетчатый квадрат 6×6 разрезан на клетчатые многоугольники. Оказалось, что каждая линия сетки, пересекающая квадрат, пересекает не менее k многоугольников. При каком наибольшем k так может быть?

Задача 77. По кругу разложены 200 карточек с числами от 1 до 20, каждого вида 10 карточек. Докажите, что среди них можно выбрать 90 подряд лежащих так, что среди них будут карточки по крайней мере 10-ти видов и сделать это можно по крайней мере 10-тью способами.

Задача 78. Вася посетил математический турнир и рассказал, что там было 218 участников, и каждому из них среди остальных участников были знакомы ровно один мальчик и ровно одна девочка. Докажите, что Вася что-то напутал. (Вася был одним из участников турнира.)

Задача 79. С числом разрешается производить одну из следующих операций: **а)** умножать на 2; **б)** прибавлять к нему его последнюю цифру; **в)** прибавлять к нему его первую цифру. Например, из числа 123 можно получить 124, 126, или 246. Можно ли при помощи таких операций из числа 1 получить число 20192019?

Задача 80. У барона Мюнхгаузена имеется набор из 10 гирь (среди гирь могут быть и одинаковые). Барон утверждает, что для любого числа k от 2 до 8 он может выбрать из этого набора k гирь таких, что их масса будет равна ровно половине массы всех гирь. Могут ли слова барона быть правдой?

Пятый тур

21 ноября 2019 г.

Задача 81. Клетки таблицы 4×4 раскрашены в пять цветов так, что в каждой строке, каждом столбце и каждом квадрате 2×2 все цвета различны. Известно, что один из этих цветов — персиковый. Какое наименьшее количество клеток персикового цвета может быть в таблице?

Задача 82. На острове лжецов и рыцарей ровно один житель сказал: «Есть лжец выше меня», ровно двое жителей сказали: «Есть хотя бы двое лжецов выше меня», ..., ровно 20 жителей сказали: «Есть хотя бы 20 лжецов выше меня». Известно, что все островитяне — разного роста, и каждый житель высказался ровно один раз. Сколько лжецов живёт на острове? (Рыцари это те, кто всегда говорит правду, а лжецы это те, кто всегда лгут.)

Задача 83. Имеется 48 шариков: красные, синие, желтые, зеленые, фиолетовые. Может ли оказаться, что их можно разложить на 3 кучки так, что в каждой синих будет больше, чем красных; можно разложить на 4 кучки так, что в каждой желтых будет больше, чем синих; можно разложить на 6 кучек так, что в каждой зеленых будет больше, чем желтых и можно разложить на 8 кучек так, что фиолетовых будет больше, чем зеленых?

Задача 84. Каждый ученик 6«Ы» класса посещает не более двух кружков. При этом для каждых двух учеников есть кружок, в который ходят они оба. Докажите, что есть кружок, в который ходит не менее двух третей всех учеников класса.

Задача 85. Дан квадрат и несколько прямоугольников. Известно, что все стороны прямоугольников меньше стороны квадрата, а сумма периметров всех прямоугольников меньше периметра квадрата. Докажите, что все прямоугольники можно уложить в квадрат без наложений.

Задача 86. Из Солнечного города в Изумрудный вышел Василий Иванович. Одновременно с ним из Изумрудного города в Солнечный выехал на велосипеде почтальон Печкин. Их встреча произошла в 1 км от Солнечного города. Если бы расстояние между городами было на 2 км больше, то их встреча произошла бы в 1,5 км от Солнечного города. Во сколько раз скорость почтальона Печкина больше скорости Василия Ивановича?

Задача 87. На клетках доски 5×5 лежат монетки (см. рисунок, число в клетке равно количеству монеток в данной клетке). Разрешается переложить одну монетку из одной клетки на соседнюю клетку по стороне, если в ней (в клетке, куда хотим переложить монетку) сейчас находится нечетное количество монеток. Так же можно к двум соседним по стороне клеткам доложить по одной монетке из мешка (в мешке имеется достаточно много монет). Можно ли при помощи таких операций сделать так, чтобы во всех клетках стало по 15 монет?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Задача 88. У Афони есть шесть стаканов с чаем. Он может выбрать любые три стакана и перелить из них в три других стакана одинаковое количество чая (сколько переливать, Афоня каждый раз решает заново). Как ему добиться того, чтобы во всех стаканах чая стало поровну?

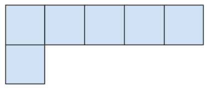
3 Высшая лига 6 класса

Командная олимпиада 6 классов

17 ноября 2019 г.

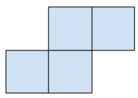
Задача 89. Вокруг большой лужи встали 20 жителей острова рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут) и посмотрели на неё. Потом каждый из 20 людей грустно сказал: «Среди следующих трёх людей справа от меня по кругу есть хотя бы 2 рыцаря». Сколько среди них было рыцарей?

Задача 90. Какое наибольшее количество шестиклеточных сапожков можно вырезать из клетчатого прямоугольника 7×12?



Задача 91. В наличии имеется мягкая веревка длиной 1 метр и деревянная палочка длиной 7 см. Докажите, что с помощью этих инструментов можно отмерить любую длину от 11 до 17 см, выраженную целым числом сантиметров.

Задача 92. Доску 11×11 заполняют числами от 1 до 121 по следующему правилу: в первой строке слева направо записаны числа от 1 до 11 в порядке возрастания, во второй — слева направо от 12 до 22 в том же порядке, и так далее. Может ли сумма в клетках, образующих Z-тетрамино, быть равной 244? (Z-тетрамино можно как угодно поворачивать и переворачивать.)

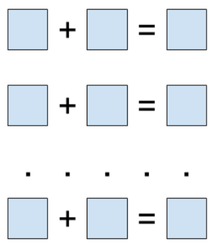


Задача 93. Может ли произведение нескольких (больше одного) последовательных натуральных чисел быть равно $99\ldots992$ (2019 девяток и 1 двойка)?

Задача 94. 2019 детей встали в хоровод, каждый из них был в кепке одного из трёх цветов: белого, синего или красного. Неожиданно прибежали несколько котят и сели между детьми таким образом: если рядом стояли двое детей в кепках разных цветов, то между ними сели 1, 2 или 3 котёнка (1 котёнок между детьми в белой и синей кепках, 2 котёнка между детьми в красной и синей кепках, 3 котёнка между детьми в белой и красной кепках). Между парами детей в одноцветных кепках котята не сели. Могло ли всего между детьми сесть 2019 котят?

Задача 95. Иннокентий придумал числовой ребус: АЛЬФА + АЛЕФ = ФИЛИН (Одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, разными — разные.) Найдите все решения ребуса и объясните, почему других решений нет.

Задача 96. На доске написано N примеров на сложение двух чисел. Двое играют в игру: каждым ходом в один из свободных квадратиков разрешается вписать любое натуральное число или 0. Когда все $3N$ чисел вписаны (во всех N примерах вписаны оба слагаемых и сумма), игроки выясняют, сколько примеров на доске являются верными. Если хотя бы один пример верен, то выигрывает второй игрок, иначе выигрывает первый игрок. При каких значениях N второй игрок может гарантировать себе победу вне зависимости от действий первого игрока?



Первый тур

18 ноября 2019 г.

Задача 97. В рыбалке участвовали 7 рыбаков. Никакие двое из них не поймали одинаковое количество рыбок. Кроме того, оказалось, что любые трое из них поймали вместе не менее 13 рыбок. Какое наименьшее число рыбок погли поймать все семеро рыбаков?

Задача 98. Натуральное число делится на все числа от 1 до 200, кроме двух последовательных. Каких?

Задача 99. У Пети и Васи есть девять карточек с цифрами $1, 2, \ldots, 9$ и полоска из 9 клеток. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. При своём ходе Петя кладёт на свободную клетку любую ещё не использованную карточку, а Вася — две ещё не использованных карточки на две свободных клетки. Если число, которое получится после использования всех карточек, делится на 27, выигрывает Вася, а если нет, то Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

Задача 100. В теннисном турнире участвовали 10 мальчиков и 10 девочек. Каждый из 20 игроков сыграл со всеми остальными по одному разу. Ничьих в теннисе не бывает. Каждой девочке за победу над мальчиком дарили один цветок. Могло ли оказаться так, что все мальчики набрали поровну очков, а у всех девочек одинаковое количество цветов?

Задача 101. В каждой клетке квадрата 5×5 находится по одному фонарю. На пульте, где находятся переключатели от этих фонарей, что-то замкнуло, и теперь при нажатии на переключатель изменяет своё состояние не только соответствующий переключателю фонарь, но и фонари во всех соседних по стороне клетках. Сначала все фонари были выключены. После нескольких нажатий на переключатели включились все фонари, кроме одного. В каких клетках может находиться этот выключатель? (Найдите все возможные положения и докажите, что других нет.)

Задача 102. В кемпинг заехали туристы. На обед каждый из них съел половину банки супа, треть банки тушенки и четверть банки фасоли. Всего они съели 156 банок еды. Сколько было туристов?

Задача 103. 2019 человек, каждый из которых — рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжёт, выстроились в шеренгу. Затем каждый из них сказал: «Количество лжецов слева от меня больше, чем количество рыцарей справа от меня». Сколько в этой шеренге лжецов?

Задача 104. Квадрат 11×11 разбит на квадраты 4×4 и прямоугольники 1×3 или 3×1. Докажите, что в большом квадрате найдётся ряд (строка или столбец), пересекающий нечётное число фигур.

Второй тур

19 ноября 2019 г.

Задача 105. В классе поровну мальчиков и девочек. Каждый мальчик написал, сколько в классе девочек выше его, а каждая девочка написала, сколько в классе мальчиков ниже её. Оказалось, что все написанные числа не меньше четверти числа учеников в классе. Докажите, что суммарный рост девочек в классе больше суммарного роста мальчиков.

Задача 106. В строку выписаны целые числа. Известно, что каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предшествующих, и сотое число равно $\underbrace{20192019\ldots2019}_{100\text{ раз}}$. Может ли оказаться, что двухсотое число равно $\underbrace{20202020\ldots2020}_{200\text{ раз}}$?

Задача 107. На свободные поля шахматной доски 8×8 по одному ставят чёрных и белых слонов. Чёрного слона можно поставить на свободное поле, если он бьёт чётное количество ранее выставленных слонов любого цвета (например, не бьёт ни одного слона), а белого — если он бьёт нечётное количество ранее выставленных слонов любого цвета. Таким образом заполнили все клетки доски. Какое наименьшее количество чёрных слонов могло при этом оказаться на доске? (Слоны бьют друг друга, если стоят на одной диагонали и между ними нет других слонов.)

Задача 108. Квадрат разрезан на меньшие, не обязательно равные, квадраты с целыми периметром. Докажите, что периметр исходного квадрата — также целое число.

Задача 109. 300 человек играли между собой в пинг-понг. Каждые два человека сыграли между собой не более одного раза. При каком наибольшем n могло случиться, что никто не сыграл больше n партий, но были люди, сыгравшие все количества партий от 1 до n?

Задача 110. Вдоль тропинки расположены 2019 норок, в одной из которых прячется мышонок Дуду. Кот Пажо может сунуть лапу в любую из норок; если Дуду в этой норке, Пажо его съест, а если нет, Дуду перебежит в норку, соседнюю (слева или справа) с той, в которой он сейчас. Может ли Пажо гарантированно съесть Дуду?

Задача 111. У числового автомата есть четыре кнопки, нажатие на которые позволяет превратить введённое число n в числа $2n$, $\frac{n}{2}$, $3n+1$, $\frac{n-1}{3}$ соответственно. Докажите, что из любого натурального числа можно, нажимая на эти кнопки, получить число 1. (Не требуется, чтобы все промежуточные числа были натуральными.)

Задача 112. Найдите наибольшее натуральное число, у которого все цифры различны и разность каждых двух соседних цифр не меньше 5.

Третий тур

20 ноября 2019 г.

Задача 113. Найдите наименьшее натуральное число, у которого есть три разных собственных делителя с суммой 1001. (Собственный делитель числа – это его натуральный делитель, отличный от 1 и самого числа.)

Задача 114. У каждой из пяти девочек есть несколько конфет, у всех — разное количество. Оказалось, что у каждых трёх девочек вместе больше конфет, чем у двух остальных. Какое наименьшее количество конфет может быть у всех девочек?

Задача 115. Числа от 1 до 3000 расставлены по кругу через одинаковые промежутки. Для каждого числа n среди следующих за ним по часовой стрелке 1499 чисел и предыдущих 1499 чисел поровну чисел, меньших n. Какое число стоит напротив числа 2019?

Задача 116. В классе учатся 10 мальчиков и 15 девочек. Некоторые ученики класса правдивые (то есть всегда говорят правду), а некоторые – лжецы (то есть всегда врут). Однажды каждый ученик сделал заявление. Один мальчик заявил, что в классе не менее одного лжеца, другой – что в классе не менее двух лжецов, третий – что не менее трёх лжецов, и так далее; наконец, десятый мальчик сказал, что лжецов в классе не менее десяти. Одна девочка сказала, что в классе не менее одного правдивого ученика, другая – что не менее двух правдивых, третья – что не менее трёх правдивых, и так далее; наконец, пятнадцатая девочка сказала, что правдивых учеников в классе не менее пятнадцати. Сколько в этом классе лжецов?

Задача 117. Маша набрала на компьютере очень длинную последовательность A из цифр 0, 1 и 2. Таня заметила, что в этой последовательности можно в четырёх местах найти одну и ту же последовательность B из 2019 цифр (возможно, эти способы накладываются друг на друга). А Серёжа заметил, что никакую последовательность из 2020 цифр нельзя встретить больше одного раза. Докажите, что последовательность A начинается с последовательности B.

Задача 118. Вася посетил математический турнир и рассказал, что там было 2018 участников, и каждому из них среди остальных участников были знакомы ровно один мальчик и ровно одна девочка. Докажите, что Вася что-то напутал.

Задача 119. У Пети и Васи есть полоска из 1000 белых клеток. Мальчики делают ходы по очереди (начинает Петя). Своим ходом Петя может закрасить чёрным две соседних белых клетки, а Вася – одну или три белых клетки, идущих подряд. Делать ход, после которого останется белая клетка, у которой нет соседних белых, запрещается. Проигрывает игрок, не имеющий хода. Если удалось закрасить все клетки, выигрывает Петя. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 120. Клетчатый квадрат 6×6 разрезан на клетчатые многоугольники. Оказалось, что каждая линия сетки, пересекающая квадрат, пересекает не менее k многоугольников. При каком наибольшем k так может быть?

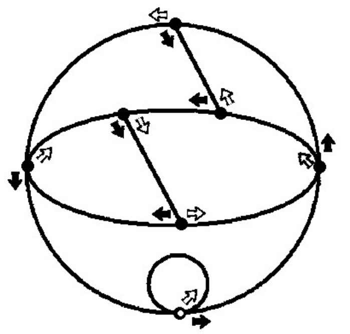
Четвертый тур

21 ноября 2019 г.

Задача 121. Можно ли расставить в клетках таблицы 2019×2019 все числа от 1 до 2019^2 (по одному числу в клетке) так, чтобы для каждой клетки таблицы в строке, который содержит эту клетку, или в столбце, который содержит эту клетку, нашлись три числа, одно из которых равно произведению двух других?

Задача 122. Назовём *коэффициентом попадания* футболиста отношение числа забитых им пенальти к общему числу пробитых им пенальти. В начале сезона у знаменитого футболиста Артёма коэффициент попадания был меньше $3/4$, а в конце — больше $3/4$. Можно ли наверное утверждать, что в какой-то момент его коэффициент попадания был ровно $3/4$?

Задача 123. Дано натуральное число n. В белой точке внизу приложенного рисунка стоит фишка. Игрок читает первую (самую левую) цифру числа n и делает фишкой столько ходов по чёрным стрелкам, сколько единиц в этой цифре. Если дальше есть вторая цифра, он двигает фишку по белой стрелке, а затем делает столько ходов по чёрным стрелкам, сколько единиц во второй цифре. Так он перебирает все цифры числа n: перед каждой новой цифрой двигает фишку по белой стрелке, а затем делает столько ходов по чёрным стрелкам, сколько единиц содержится в очередной цифре. (Например, при $n = 325$ игрок идёт вдоль 3 чёрных стрелок, 1 белой, 2 чёрных, 1 белой и 5 чёрных.) Докажите, что если n делится на 7, то фишка закончит свой маршрут в белой точке.



Задача 124. У Афони есть шесть стаканов с чаем. Он может выбрать любые три стакана и перелить из них в три других стакана одинаковое количество чая (сколько переливать, Афоня каждый раз решает заново). Как ему добиться того, чтобы во всех стаканах чая стало поровну?

Задача 125. Дан квадрат и несколько прямоугольников. Известно, что все стороны прямоугольников меньше стороны квадрата, а сумма периметров всех прямоугольников меньше периметра квадрата. Докажите, что все прямоугольники можно уложить в квадрат без наложений.

Задача 126. Крош и Ёжик по очереди (начинает Крош) ставят в клетки таблицы 5×5 натуральные числа от 1 до 25 (каждое число можно использовать только один раз, в клетку можно ставить только одно число). Если после заполнения таблицы найдётся строка или столбец с суммой чисел 70, выигрывает Крош, в противном случае — Ёжик. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 127. Каждый ученик 6Ы класса посещает не более двух кружков. При этом для каждых двух учеников есть кружок, в который ходят они оба. Докажите, что есть кружок, в который ходит не менее двух третей всех учеников класса.

Задача 128. Вася составляет таблицу *квазипростых чисел.* Первым квазипростым числом он объявил 2, а потом стал перебирать натуральные числа по порядку, начиная с 3, и объявлять очередное число квазипростым, если его нельзя разложить в произведение двух меньших квазипростых (возможно, одинаковых). Является ли число 1000 квазипростым?

4 Первая лига 6 класса

Первый тур

18 ноября 2019 г.

Задача 129. В рыбалке участвовали 7 рыбаков. Никакие двое из них не поймали одинаковое количество рыбок. Кроме того, оказалось, что любые трое из них поймали вместе не менее 13 рыбок. Какое наименьшее число рыбок могли поймать все семеро рыбаков?

Задача 130. Найдите наибольшее натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы двух составных чисел.

Задача 131. У Пети и Васи есть девять карточек с цифрами $1, 2, \ldots, 9$ и полоска из 9 клеток. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. При своём ходе Петя кладёт на свободную клетку любую ещё не использованную карточку, а Вася — две ещё не использованных карточки на две свободных клетки. Если число, которое получится после использования всех карточек, делится на 27, выигрывает Вася, а если нет, то Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

Задача 132. В теннисном турнире участвовали 10 мальчиков и 10 девочек. Каждый из 20 игроков сыграл со всеми остальными по одному разу. Ничьих в теннисе не бывает. Каждой девочке за победу над мальчиком дарили один цветок. Могло ли оказаться так, что все мальчики набрали поровну очков, а у всех девочек одинаковое количество цветов?

Задача 133. Можно ли числа $1, 2, 3, \ldots, 1001$ расставить по кругу так, чтобы каждое число делилось на разность своих соседей?

Задача 134. В кемпинг заехали туристы. На обед каждый из них съел половину банки супа, треть банки тушенки и четверть банки фасоли. Всего они съели 156 банок еды. Сколько было туристов?

Задача 135. 2019 человек, каждый из которых — рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжёт, выстроились в шеренгу. Затем каждый из них сказал: «Количество лжецов слева от меня больше, чем количество рыцарей справа от меня». Сколько в этой шеренге лжецов?

Задача 136. Квадрат 11×11 разбит на квадраты 4×4 и прямоугольники 1×3 или 3×1. Докажите, что в большом квадрате найдётся ряд (строка или столбец), пересекающий нечётное число фигур.

Второй тур

19 ноября 2019 г.

Задача 137. В классе поровну мальчиков и девочек. Каждый мальчик написал, сколько в классе девочек выше его, а каждая девочка написала, сколько в классе мальчиков ниже её. Оказалось, что все написанные числа не меньше четверти числа учеников в классе. Докажите, что суммарный рост девочек в классе больше суммарного роста мальчиков.

Задача 138. В строку выписаны целые числа. Известно, что каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предшествующих, и двадцатое число равно 2019. Может ли оказаться, что сороковое число равно 20202020?

Задача 139. Таблица 3×3 заполнена числами, как показано на рисунке. Разрешается поменять местами числа в любых двух клетках, имеющих общую сторону. Можно ли, действуя таким образом, добиться того, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце делилась на 3?

7	2	4
5	7	7
4	1	8

Задача 140. Квадрат разрезан на меньшие, не обязательно равные, квадраты с целыми периметром. Докажите, что периметр исходного квадрата — также целое число.

Задача 141. 300 человек играли между собой в пинг-понг. Каждые два человека сыграли между собой не более одного раза. При каком наибольшем n могло случиться, что никто не сыграл больше n партий, но были люди, сыгравшие все количества партий от 1 до n?

Задача 142. Вдоль тропинки расположены 2019 норок, в одной из которых прячется мышонок Дуду. Кот Пажо может сунуть лапу в любую из норок; если Дуду в этой норке, Пажо его съест, а если нет, Дуду перебежит в норку, соседнюю (слева или справа) с той, в которой он сейчас. Может ли Пажо гарантированно съесть Дуду?

Задача 143. У числового автомата есть четыре кнопки, нажатие на которые позволяет превратить введённое число n в числа $2n$, $\frac{n}{2}$, $3n+1$, $\frac{n-1}{3}$ соответственно. Докажите, что из любого натурального числа можно, нажимая на эти кнопки, получить число 1. (Не требуется, чтобы все промежуточные числа были натуральными.)

Задача 144. Найдите наибольшее натуральное число, у которого все цифры различны и разность каждых двух соседних цифр не меньше 5.

Третий тур

20 ноября 2019 г.

Задача 145. В квадрате 1000×1000 расставлены числа так, что в любом квадрате 2×2 сумма левого верхнего числа и правого нижнего числа равна сумме левого нижнего числа и правого верхнего числа. Докажите, что сумма чисел, стоящих в левом верхнем и правом нижнем углах квадрата 1000×1000, равна сумме чисел, стоящих в двух других углах.

Задача 146. У каждой из пяти девочек есть несколько конфет, у всех – разное количество. Оказалось, что у каждых трёх девочек вместе больше конфет, чем у двух остальных. Какое наименьшее количество конфет может быть у всех девочек?

Задача 147. Числа от 1 до 3000 расставлены по кругу через одинаковые промежутки. Для каждого числа n среди следующих за ним по часовой стрелке 1499 чисел и предыдущих 1499 чисел поровну чисел, меньших n. Какое число стоит напротив числа 2019?

Задача 148. В классе учатся 10 мальчиков и 15 девочек. Некоторые ученики класса правдивые (то есть всегда говорят правду), а некоторые – лжецы (то есть всегда врут). Однажды каждый ученик сделал заявление. Один мальчик заявил, что в классе не менее одного лжеца, другой – что в классе не менее двух лжецов, третий – что не менее трёх лжецов, и так далее; наконец, десятый мальчик сказал, что лжецов в классе не менее десяти. Одна девочка сказала, что в классе не менее одного правдивого ученика, другая – что не менее двух правдивых, третья – что не менее трёх правдивых, и так далее; наконец, пятнадцатая девочка сказала, что правдивых учеников в классе не менее пятнадцати. Сколько в этом классе лжецов?

Задача 149. Маша набрала на компьютере очень длинную последовательность A из цифр 0, 1 и 2. Таня заметила, что в этой последовательности можно в четырёх местах найти одну и ту же последовательнснт B из 2019 цифр (возможно, эти способы накладываются друг на друга). А Серёжа заметил, что никакую последовательность из 2020 цифр нельзя встретить больше одного раза. Докажите, что последовательность A начинается с последовательности B.

Задача 150. Вася посетил математический турнир и рассказал, что там было 2018 участников, и каждому из них среди остальных участников были знакомы ровно один мальчик и ровно одна девочка. Докажите, что Вася что-то напутал.

Задача 151. Можно ли расставить 100 целых чисел по кругу так, чтобы для любого числа n от 101 до 200 среди расставленных чисел нашлись бы три последовательных числа, сумма которых равна n?

Задача 152. Клетчатый квадрат 6×6 разрезан на клетчатые многоугольники. Оказалось, что каждая линия сетки, пересекающая квадрат, пересекает не менее k многоугольников. При каком наибольшем k так может быть?

Четвертый тур

21 ноября 2019 г.

Задача 153. Можно ли расставить в клетках таблицы 2019×2019 все числа от 1 до 2019^2 (по одному числу в клетке) так, чтобы для каждой клетки таблицы в строке, который содержит эту клетку, или в столбце, который содержит эту клетку, нашлись три числа, одно из которых равно произведению двух других?

Задача 154. Назовём *коэффициентом попадания* футболиста отношение числа забитых им пенальти к общему числу пробитых им пенальти. В начале сезона у знаменитого футболиста Артёма коэффициент попадания был меньше $3/4$, а в конце – больше $3/4$. Можно ли наверное утверждать, что в какой-то момент его коэффициент попадания был ровно $3/4$?

Задача 155. Число представлено как сумма 99 различных простых чисел. Докажите, что его можно представить как сумму 100 различных составных чисел.

Задача 156. Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, чтобы ни у каких двух чисел, стоящих рядом, сумма не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Задача 157. Дан квадрат и несколько прямоугольников. Известно, что все стороны прямоугольников меньше стороны квадрата, а сумма периметров всех прямоугольников меньше периметра квадрата. Докажите, что все прямоугольники можно уложить в квадрат без наложений.

Задача 158. Крош и Ёжик по очереди (начинает Крош) ставят в клетки таблицы 5×5 натуральные числа от 1 до 25 (каждое число можно использовать только один раз, в клетку можно ставить только одно число). Если после заполнения таблицы найдётся строка или столбец с суммой чисел 70, выигрывает Крош, в противном случае — Ёжик. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 159. Каждый ученик 6«Ы» класса посещает не более двух кружков. При этом для каждых двух учеников есть кружок, в который ходят они оба. Докажите, что есть кружок, в который ходит не менее двух третей всех учеников класса.

Задача 160. Вася составляет таблицу *квазипростых чисел.* Первым квазипростым числом он объявил 2, а потом стал перебирать натуральные числа по порядку, начиная с 3, и объявлять очередное число квазипростым, если его нельзя разложить в произведение двух меньших квазипростых (возможно, одинаковых). Является ли число 1000 квазипростым?

Задача 161. Сколько существует пар натуральных чисел x и y, для которых $200x + 4y = 2020$?

Задача 162. В однокруговом шахматном турнире Петя набрал в 10 раз больше очков, чем Вася. При каком наименьшем количестве участников турнира такое могло быть? *(Победа – 1 очко, ничья – 1/2 очка, поражение – 0 очков.)*

Задача 163. За круглым столом сидят 2018 человек. Каждый из них – либо из клана рыцарей, всегда говорящих правду, либо из клана лжецов, которые всегда лгут. Каждый из сидящих заявил: «Оба моих соседа — из одного клана». Сколько рыцарей могло быть за столом (перечислите все возможности)?

Задача 164. Одно положительное число поделили на другое. Найдите частное, если известно, что оно в 8 раз меньше делителя и в 4 раза больше делимого.

Задача 165. На плоскости провели 9 прямых. Какое наибольшее число квадратов могло при этом образоваться?

Задача 166. На доске надо записать несколько двузначных чисел так, чтобы их произведение делилось на все простые числа от 2 до 17. Каким наименьшим числом различных цифр можно для этого обойтись?

Задача 167. Когда у прямоугольника площадью 36 см^2 одну из сторон удлинили на 1 см, а другую — укоротили на 1 см, его площадь уменьшилась на 1 см^2. Какими могли быть стороны исходного прямоугольника?

Задача 168. К четырехклеточной фигуре, имеющей форму буквы Г, требуется добавить ещё одну клетку так, чтобы получилась фигура, имеющая ось симметрии. Сколькими способами это можно сделать?

5 Результаты и итоги турнира

Турнир математических мини-боёв

Победителем в лиге 4-х классов стала команда — Пятая высота «Альфа», в лиге 5-х классов — Белые ВОроны. .

Лига 4-х классов

Четвёртый математический Турнир Мёбиуса, лига 4-х классов

	Команда, город	1	2	3	4	1	2	3	4	очки	Место
1	1583 (г. Москва)		30:48 0	21:46 0	36:15 2		14:42 0	41:24 2	58:14 2	6	II
2	Пятая высота «Альфа» (г. Москва)	48:30 2		66:19 2	28:38 0	42:14 2		61:24 2	38:12 2	10	I
3	Вулкан (г. Москва)	46:21 2	19:66 0		17:57 0	24:41 0	24:61 0		29:31 0	2	IV
4	444 (г. Москва)	15:36 0	38:28 2	57:17 2		14:58 0	12:38 0	31:29 2		6	III

Лига 5-х классов

Четвёртый математический Турнир Мёбиуса, лига 5-х классов.

	Команда, город	1	2	3	4	5	6	очки	Место
1	2×2 – 1 (г. Москва)		42:20 2	35:22 2	43:31 2	42:12 2	17:56 0	8	II
2	2×2 – 2 (г. Москва)	20:42 0		33:6 2	36:49 0	26:26 1	0:72 0	3	
3	2×2 – 3 (г. Москва)	22:35 0	6:33 0		18:58 0	28:24 2	28:46 0	2	
4	НН – 1 (г. Нижний Новгород)	31:43 0	49:36 2	58:18 2		48:2 2	43:48 0	6	III
5	НН – 2 (г. Нижний Новгород)	12:42 0	26:26 1	24:28 0	2:48 0		21:62 0	1	
6	Белые ВОроны (г. Москва)	56:17 2	72:0 2	46:28 2	48:43 2	62:21 2		10	I

Турнир математических боёв

Победителем в высшей лиге 6-х классов стала команда 1329-6М, в первой лиге 6-х классов — Очаково (444).

Высшая лига 6-х классов

Бой за 1 место: 1329-6М 28 : 24 Молниеносные математики (2086)
Бой за 3 место: Косинус (444) 1 : 41 Параллело-круголовые (444)
Бой за 5 место: Логика (2086) 30 : 10 Математический пессимизм (2086)
Бой за 7 место: Гугл нам не нужен (444) 6 : 38 $2 \times 2 - 1329 - 6 - 3$

Первая лига 6-х классов

Бой за 1 место: Очаково (444) 25 : 25 ГО (444)
Бой за 3 место: Хахаски (1329) 36 : 12 Женская логика (444)
Результаты блиц-боя: Очаково 16 : 13 ГО

Четвёртый математический Турнир Мёбиуса, лига 6-х классов

Высшая лига. Подгруппа X

	Команда, город	1	2	3	4	очки
1	1329-6М (г. Москва)		44:31 2	46:14 2	56:11 2	6
2	Логика (2086) (г. Москва)	31:44 0		25:46 0	45:9 2	2
3	Косинус (444) (г. Москва)	14:46 0	46:25 2		32:24 2	4
4	Гугл нам не нужен (444) (г. Москва)	11:56 0	9:45 0	24:32 0		0

Высшая лига. Подгруппа Y

	Команда, город	1	2	3	4	очки
1	Параллело-кругголовые (444) (г. Москва)		48:22 2	36:43 0	67:15 2	4
2	Математический пессимизм (2086) (г. Москва)	22:48 0		11:49 0	38:14 2	2
3	Молниеносные математики (2086) (г. Москва)	43:36 2	49:11 2		58:17 2	6
4	2х2-1329-6-3 (г. Москва)	15:67 0	14:38 0	17:58 0		0

Первая лига

	Команда, город	1	2	3	4	очки
1	Очаково (444) (г. Москва)		23:53 0	56:20 2	39:28 2	4
2	Хахаски (1329) (г. Москва)	53:23 2		30:42 0	26:50 0	2
3	Женская логика (444) (г. Москва)	20:56 0	42:30 2		24:28 0	2
4	ГО (444) (г. Москва)	28:39 0	50:26 2	28:24 2		4

6 Правила соревнований

Турнир математических боёв

1. Цель проведения турнира — развитие и поддержка олимпиадного движения, а также приобретение школьниками опыта участия в математических соревнованиях разного уровня.
2. Основным мероприятием является **турнир математических боёв**. Также будет проведён турнир математических игр *(с отдельным зачётом)*.
3. Для школьников младших классов будет использован формат мини-боёв, с сокращёнными временем решения задач и длительностью самого боя, также возможно проведение двух мини-боёв в течение одного дня.
4. В каждом бою может участвовать от 4 до 6 человек в составе одной команды.
5. В командах из 5-6 человек каждый участник имеет право на два выхода независимо в роли докладчика или оппонента. В команде из 4 человек после того как все участники используют по два выхода двое участников имеют право на третий выход. Конкурс капитанов за выход не засчитывается. Более подробно правила математических боев описаны в приложении.
6. За победу в бое дается 2 очка, за ничью — 1, за проигрыш — 0. За неявку на бой без уважительной причины засчитывается техническое поражение. Бой считается закончившимся вничью, если разница в счете составляет не более 2 баллов (кроме финальных боёв — ничья только при равенстве набранных баллов).
7. Команды распределяются по количеству очков. Если 2 или более команд набрали равное количество очков, то для определения места в лиге используются количество очков, набранных командами в личных встречах между этими командами
8. В случае, если по данным параметрам определить очередность мест невозможно, проводится дополнительный блиц-бой.
9. Блиц-бой длится 30 минут. За каждую верно решенную задачу начисляется 3 очка, за неверно решенную начисляется (-1) очко. Ко всем задачам сдаются только ответы.

Правила математического мини-боя

Единственное отличие математического мини-боя от классического матбоя — это сокращённая длительность.

1. Время решения командой задач — 1 час 30 минут для 4 класса, 2 часа для 5 класса.
2. На доклад отводится не более 15 минут, на последующую дискуссию оппонента и докладчика — не более 15 минут.
3. В каждом туре 8 задач (как в классическом матбое).

За счёт этого появляется возможность провести 2 тура в день.

Математическая игра «Спектр»

Авторы О. С. Парамонова, К. Н. Бондаренко

Длительность: 60–80 минут.

В игре 20–25 задач. Задачи разделены на 3 уровня: лёгкие задачи — выделены зелёным цветом, среднего уровня сложности — оранжевым, сложные — красным, соответственно, у задач разного уровня разная стоимость. На карточке по кругу расположены номера задач в определённой последовательности (у всех команд одна и та же последовательность). Видны только номера и цвета задач.

Цель игры: набрать как можно больше очков за отведённое время. При равенстве очков, место выше занимает команда с меньшим числом сданных задач.

В начале игры всем командам выдаётся одна и та же задача (в любой момент времени команда решает **только одну задачу**). Если задача решена верно, то команда выбирает следующей задачу ту, которая расположена на расстоянии 3 от сданной задачи против или по часовой стрелке (ранее сданные задачи при этом не учитываются).

Если задача решена неверно, то следующая задача выбирается на расстоянии 2.

Если ещё одна задача решена неверно, то следующая задача выбирается на расстоянии 1 — соседние задачи.

Если задача решена верно, то расстояние увеличивается на 1, если неверно, то уменьшается на 1 (если это возможно).

Возможные расстояния: 1, 2 или 3.

Каждую задачу можно сдавать только один раз!