Командная олимпиада. 2 октября 2016 года.

1. В учебнике по математике 2016 задач. Учительница задает детям на уроке 4 задачи из учебника. Номера она определяет, прикрепляя к магнитной доске карточки с цифрами от 0 до 9. При этом карточки «6» и «9» взаимозаменяемы. Какое минимальное количество карточек нужно учительнице, чтобы записать четыре любые номера из учебника?

2. На Острове Рыцарей и Лжецов живёт клан Рыцарей, всегда говорящих правду, и клан Лжецов, которые всегда врут. Известно, что те, в чьём имени одинаковое число букв, относятся к одному клану. Однажды на дне рождения Андрея, кроме хозяина, собрались Борис, Виктор, Павел и Юрий. «Нас, рыцарей, здесь всего трое», – сказал один из гостей. «Нет, рыцарей среди нас нет вообще», – возразил ему Юрий. Сколько рыцарей было среди собравшихся?

3. Можно ли прямоугольник размером 4x5 клеток разрезать по линиям сетки на 5 одинаковых по площади, но попарно разных по форме фигур?

4. В парламенте Швамбрании рабочий день продолжается 6 часов. Каждый депутат сочиняет один законопроект за 5 минут. По регламенту каждые два депутата должны один раз за день согласовать свои позиции. Согласование занимает 10 минут и в нём всегда участвуют ровно два депутата, в это время они законопроектов не сочиняют. Сколько депутатов должно быть в парламенте, чтобы каждый день там вырабатывалось наибольшее количество законопроектов?

5. В треугольнике ABC угол B равен 60°, а угол между медианой AM и биссектрисой CE также равен 60°. Докажите, что треугольник ABC – равносторонний.

6. Развёрткой куба называется плоская фигура, состоящая из 6 квадратов со стороной a, сгибая которую по границам квадратов, можно сложить куб со стороной a. Можно ли из квадрта со стороной 5 вырезать развертки трёх кубов со стороной 1?

7. В 8 коробках находится $3m$ шариков, пронумерованных числами 1, 1, 1, 2, 2, 2, …, m, m, m. Известно, что для любых двух коробок найдётся число k такое, что в каждой из этих двух коробок есть шарик с номером k. Каким может быть наименьшее возможное значение m?

8. В выпуклом пятиугольнике ABCDE диагонали AC и AD равны. Известно, что угол CAD равен 20°, а угол BAE – 40 °. Докажите, что $4AC < 3P_{BCDE}$, где P_{BCDE} – периметр четырехугольника BCDE.

9. На доске написано два ненулевых числа. За одно действие разрешается заменить одно из этих чисел на обратное к нему, или же заменить одно из этих чисел на их произведение. Можно ли такими операциями из пары чисел 2 и 3 получить пару чисел 4 и 6 (в любом порядке)?

10. В некоторой компании 2017 человек. Известно, что у всех, имеющих четное количество знакомых в этой компании (назовем их *чётники*), количество знакомых одинаково. Точно так же у всех, имеющих нечетное количество знакомых в этой компании (назовем их *нечётники*), это количество знакомых одинаково. Известно, что четники знакомы только с нечетниками, а нечетники только с четниками. Докажите, что все чётники знакомы со всеми нечётниками, а все нечётники знакомы со всеми чётниками. (Знакомство взаимно)

Время на решение – 3 часа. В первые 20 минут задачи не принимаются.

Каждый участник имеет право рассказать не более трех задач. Каждую задачу можно рассказывать не более трех раз.