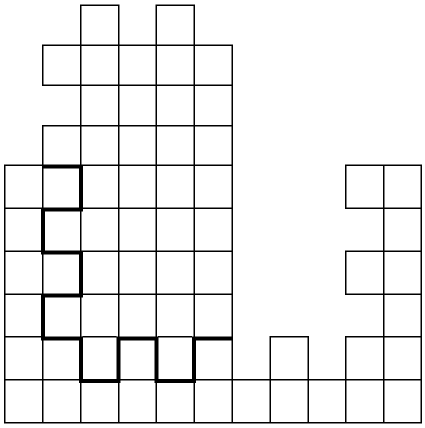
Первый международный математический турнир разновозрастных команд «Дважды Два»

2 ноября 2012 г

Командная олимпиада

1. Разрежьте фигуру, изображённую на картинке, на две части, из которых можно сложить прямоугольник. Части можно двигать и поворачивать, но нельзя накладывать друг на друга и переворачивать. *(А.Солынин)*



Решение. Разрезание показано на рисунке.

2. На острове живут только рыцари (которые всегда говорят правду) и лжецы (которые всегда лгут). Трое из них сделали по два заявления.

Первый: «На острове живёт не более 3 человек», «Все жители острова – лжецы».

Второй: «На острове живёт не более 4 человек», «Не все жители острова – лжецы».

Третий: «На острове живёт 5 человек», «На острове не менее 3 лжецов». Сколько человек живёт на острове и сколько среди них лжецов? (*С.Гайфуллин*)

Решение. Фраза первого жителя «Все жители острова – лжецы» не может быть истинной. Следовательно, первый лжец, и на острове существуют рыцари. Значит, фраза второго «Не все жители острова – лжецы» истинна, откуда получаем, что второй является рыцарем. Отсюда на острове ровно 4 человека. Следовательно, третий лжец, а тогда четвёртый (не участвующий в разговоре) —рыцарь (иначе вторая фраза третьего истинна). Ответ: 4 человека, из них двое лжецов.

3. В Волшебной стране есть монеты достоинством 1, 2 и 3 Еюня, которые весят соответственно 1, 2 и 3 грамма. У Саши есть по три монеты каждого типа, при этом одна из девяти монет фальшивая: ее вес отличается от настоящей. Как Саше за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету? *(Н.Михайловский)*

Решение. Будем называть монету подозрительной, если она по результатам проведённых взвешиваний может оказаться фальшивой. Первым взвешиванием положим на каждую чашу по одной монете каждого достоинства.

Если весы находятся в равновесии, то подозрительными являются монеты, не лежащие на чашах – их по одному каждого достоинства. Вторым взвешиванием сравним подозрительный еюнь с настоящим (последний выявлен первым взвешиванием), а третим – подозрительные два еюня с настоящими.

Пусть при первом взвешивании весы вышли из равновесия. Выберем монеты из более лёгкой чаши и взвесим их: на одной чашке 1 и 2 еюня, на второй – 3 еюня. Если весы не в равновесии, следовательно, фальшивая монета легче настоящей, и подозрительными являются взвешиваемые монеты. Если же весы остались в равновесии, то мы знаем, что фальшивая монета тяжелее настоящей (и подозрительных монет также осталось три).

Теперь возьмём три подозрительные монеты и добавим к ним 1 настоящий еюнь. Положим на левую чашку две одноеюневых монеты, а на правую – двухеюневую. Теперь мы легко найдём фальшивую монету, зная, как соотносится вес настоящей и фальшивой.

4. Фигура «Единорог» ходит на одну клетку вправо, вниз или по диагонали влево-вверх. Единорог обошёл шахматную доску, побывав на каждой клетке по разу. Начинал он с левого верхнего угла. Мог ли он закончить в правом нижнем углу? (*Н.Михайловский, А.Солынин*)

Решение. Допустим, что мог. Пронумеруем горизонтали сверху вниз (от 1 до 8) и вертикали слева направо (тоже от 1 до 8). На каждой клетке напишем сумму номеров её горизонтали и вертикали. Тогда с каждым недиагональным ходом единорога число в его клетке увеличивается на 1, а с каждым диагональным – уменьшается на 2. Изначально было число 2, в конце оно стало равно 16 (т.е. нужно увеличить число в клетке на 14). Пусть у нас сделано x диагональных ходов и 63-x недиагональных. Получим уравнение 63-x-2x=14, откуда x является нецелым числом. Противоречие.

5. Автомат Григорьева может из двух карточек с натуральными числами *a*, *b* сделать либо одну карточку с их суммой, либо *a* карточек, на каждой из которых написано число *b*. У Серёжи изначально есть 3 карточки с числами 3,4,5. Он хочет получить ровно одну карточку, на которой написано 2012. Удастся ли ему это? (*С.Григорьев*)

Решение. Это возможно, причём многими способами. Например, из карточек 4, 3 сделаем 4 карточки по 3. Далее много раз проделаем такую операцию: из карточек 3, 3 получим карточки 3, 3, 3 (т.е. просто прибавляется одна карточка 3). В итоге у нас будет одна карточка 5 и 669 карточек по 3. Осталось заменить эти карточки на их сумму.

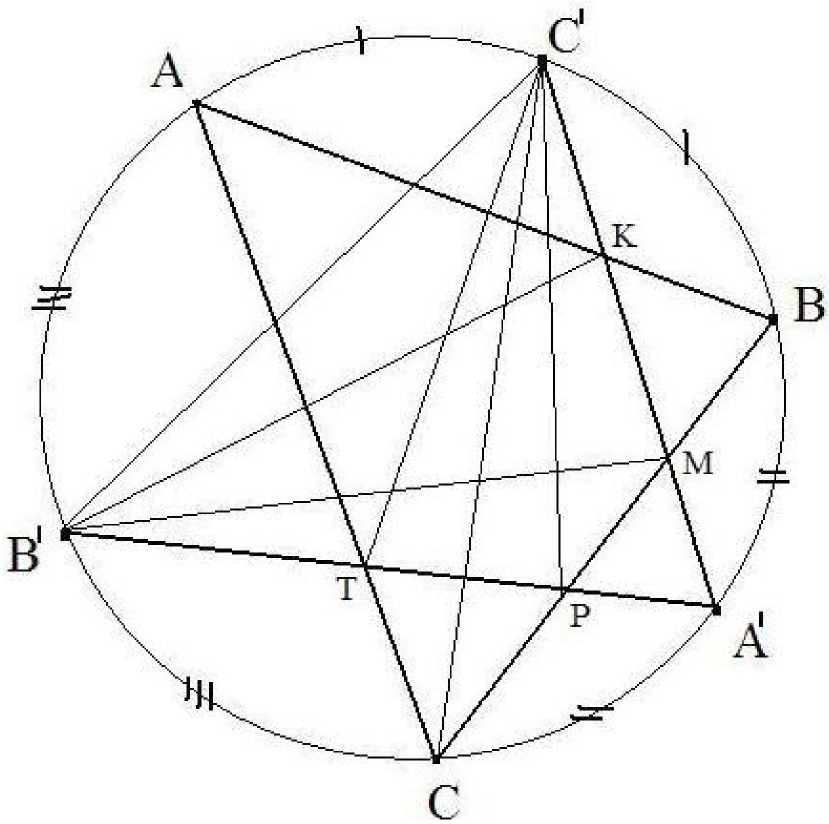
6. У Коли есть коробка размером 40x50x70 дюймов, заполненная шариками, радиус которых не превосходит 5 дюймов. Докажите, что Коля сможет переложить шарики в коробку размером 30x40x160 дюймов. (*Н.Михайловский*)

Решение. Отрежем от коробки кусок 40x30x70 дюймов, повернём и переложим в коробку 30x40x160 (в этой коробке остался свободный кусок 30x40x90). Вместе с этим куском перенесём в коробку те шарики, которые полностью оказались в нём. Неперенесённые шарики укладываются в кусок коробки 40x30x70 дюймов: второе измерение после разреза равнялось 20, но мы должны добавить шарики, по которым проходит разрез, а это добавляет 10 дюймов к измерению. Этот кусок мы тоже можем положить в большую коробку.

7. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым две партии: одну белыми фигурами, другую – черными. По окончании турнира оказалось, что все участники набрали одинаковое количество очков (за победу дается 1 очко, за ничью – 1/2 очка, за поражение – 0 очков). Докажите, что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий белыми. (*С.Гайфуллин*)

Решение. Пусть у нас было всего n участников. Каждый мог выиграть от 0 до n-1 партии белыми – всего n вариантов. Допустим противное: не найдётся двух участников с одинаковым числом выигрышей белыми. Тогда все эти варианты реализуются по разу. Посмотрим на двух участников, у которых 0 и n-1 выигрыш белыми. Чтобы первому догнать по очкам второго, он должен выиграть все партии чёрными фигурами (в т.ч. и у второго). Противоречие с тем, что второй выиграл все партии белыми.

8. В окружность вписан треугольник ABC. Точка C_1 – середина дуги AB, точка A_1 – середина дуги BC, точка B_1 – середина дуги AC. Отрезок A_1C_1 пересекает стороны треугольника AB и BC в точках K и M соответственно, а отрезок A_1B_1 стороны AC и BC в точках T и P соответственно. Докажите, что углы KB_1M и TC_1P равны. (*И.Сидоров*)



Решение.

$\angle B'PC = \dfrac{дуга B\,A' + дуга\; B'C}{2} = \dfrac{дуга\; A'C + дуга\; B'A}{2} = \angle A'TC \Rightarrow \Delta TCP$ равнобедренный. Проведём биссектрису угла $\angle TCP$. Заметим, что она пересечёт описанную окружность как раз в точке C' (так как равные вписанные углы должны опираться на равные дуги, а $дуга AC' = дуга C'B$). ΔTCP равнобедренный и следовательно, CC' является также медианой и высотой, однако и в треугольнике $\Delta TC'P$ отрезок CC' является медианой и высотой $\Rightarrow$ $\Delta TC'P$ равнобедренный и $\angle C'TP = \angle C'PT$.

Заметим, что такими же рассуждениями доказывается, что $\Delta KB'M$ равнобедренный и $\angle B'KM = \angle B'MK$.

$\angle B'C'A' = \dfrac{дуга\; B'C + дуга C\; A'}{2} = \dfrac{дуга\; B'C + дуга\; A'B}{2} = \angle BP\,A'$

$\angle BPA'$ и $\angle MPB'$ смежные $\Rightarrow$ $\angle BPA' + \angle MPB' = 180°$, но $\angle B'C'A' = \angle BPA'$, и значит $\angle B'C'M + \angle MPB' = 180° \Rightarrow$ четырехугольник $B'PMC'$ вписанный $\Rightarrow \angle BMC' = \angle C'PB'$

Итак $\angle BMC' = \angle C'PB'$, $\angle B'KM = \angle B'MK$, $\angle C'TP = \angle C'PT$, но значит $\angle C'TP = \angle C'PT = \angle B'KM = \angle B'MK$.

$\angle KB'M = 180° - \angle B'KM - \angle B'MK = 180° - \angle C'TP - \angle C'PT = \angle TC'P$ что и требовалось доказать.

9. Можно ли поставить на доску 2012x2012 тысячу ферзей так, чтобы они били все клетки? Считается, что ферзь бьёт в том числе и ту клетку, на которой стоит. (*А.Солынин*)

Решение. Допустим, что это возможно. Вычеркнем 1000 горизонталей и 1000 вертикалей, на которых стоят ферзи. Из оставшихся клеток возьмём «каёмку», т.е. все невычеркнутые клетки в первом и последнем невычеркнутом столбце и в первой и последней невычеркнутой строке. Этих клеток 4044, и они могут быть биты лишь по диагоналям. Но каждый ферзь бьёт не более 4 таких клеток. Противоречие.

10. В ряд стоит *n* очень больших бочек. В первой бочке 1 литр молока, во второй 3 литра и так далее. В последней бочке 2*n*-1 литров молока. Винни-Пух может перелить в любую бочку столько молока, сколько там уже есть. Выливать из бочки молоко нельзя, также нельзя переливать из одной бочки в другую молоко, если в первой бочке не хватает молока для удвоения во второй. При каких *n* данными операциями можно собрать все молоко в одной бочке? (*Н.Михайловский, А.Солынин, Е.Иванова*)

Ответ: n является степенью двойки.

Решение. Заметим, что во всех бочках у нас n^2 литров молока. Пусть n не является степенью двойки. Тогда существует простой делитель числа n, не равный 2 (назовём этот делитель p). Изначально количество молока в некоторых бочках не делится на p, а в конце количество молока в каждой бочке кратно p. Посмотрим на переливание, при котором исчезли бочки с количеством молока, не кратным p. В одной из бочек количество молока после переливания удвоилось и стало делиться на p. Следовательно, количество молока в этой бочке и до этого переливания делилось на p. А в другой бочке количество молока уменьшилось – как мы выяснили, на величину, кратную p. Итак, при этих переливаниях не могли исчезнуть бочку с количеством молока, не кратным p.

Теперь докажем, что, если общее количество молока есть степень двойки (и в каждой бочке изначально целое количество литров), то мы сможем всё молоко слить в одну бочку – независимо от изначального распределения. Доказываем методом спуска. Пусть у нас есть бочки с нечётным количеством литров молока. Таких бочек должно быть чётное количество, т.к. суммарное количество молока есть число чётное. Разобьём эти бочки на пары, и в каждой паре перельём молоко из одной бочки в другую. При такой операции не осталось бочек с нечётным количеством молока. Теперь разделим количество молока в каждой бочке на 2 и применим ту же процедуру.