Командная олимпиада. 16 октября 2011 года.

1. В каждой ячейке куба размером 2011×2011×2011 сидит таракан. Неожиданно каждый из тараканов переполз в соседнюю по грани ячейку. Докажите, что после этого найдется хотя бы одна ячейка, свободная от тараканов.

2. Петя, Вася и Юра были на олимпиаде по математике, причём кто-то из них получил на ней первое место (оно было одно). После олимпиады они сказали своему учителю. Петя: «В олимпиаде победил Юра». Юра: «Я не был на награждении». Вася: «А вот я там был». Известно, что правду сказал только победитель олимпиады. Кто это?

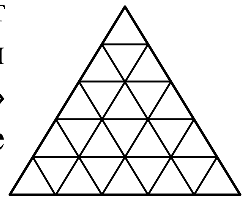
3. После дискотеки девочки пришли к выводу, что Дима танцевал с четырьмя девочками, Глеб – с тремя, а каждый из остальных мальчиков – с пятью. С другой стороны, Лиза танцевала с шестью мальчиками, Полина – с семью, а каждая из остальных девочек – с десятью мальчиками. Докажите, что кто-то ошибся.

4. В треугольнике ABC провели высоты BH и CK. Оказалось, что 2KH=BC. Найдите угол KMH, где M – середина стороны BC.

5. Среди 9 монет 8 настоящих, а одна фальшивая – на 1г легче. Есть трое чашечных весов, но одни из них сломаны – одна из чашек тяжелее другой на 1г. Как с помощью четырех взвешиваний определить фальшивую монету? Сломанные весы по внешнему виду отличить нельзя.

6. Сколькими способами можно раскрасить куб в шесть данных цветов, если каждую грань красить целиком в один цвет и все грани должны быть разных цветов? (разными считаются те раскраски, которые не совмещаются при поворотах куба)

7. В замке двадцать пять комнат (картинка справа) и в каждой живет либо рыцарь, либо лжец. Каждый житель замка высказал утверждение: «Среди моих соседей лжецов больше, чем рыцарей» (соседями они считали жителей комнат с общей стеной). Какое наибольшее число лжецов могло бы обитать в замке?



8. В треугольнике ABC отрезок AM – медиана. Пусть P – середина AM, а точка E – точка пересечения прямой CP со стороной AB. Известно, что BM=BP. Докажите, что AE=PE.

9. Есть две кучки по 2011 конфет. Лена и Андрей ходят по очереди. Начинает Лена. За ход Лена может взять 4 или 5 конфет, но все из одной кучи, а Андрей – ровно 5 конфет, но они не обязаны быть из одной кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

10. Найдите все такие тройки простых чисел a, b, c, что $ab-1$ делится на c, $ac-1$ делится на b, а $bc-1$ делится на a.

Время на решение – 3,5 часа. В первые 20 минут задачи не принимаются.

Каждый участник имеет право рассказать не более трех задач. Каждую задачу можно рассказывать не более трех раз.