

LXIII Национална олимпиада по математика

Национален кръг

Втори ден, 18 май 2014 г.

Задача 4. Да се намерят всички двойки прости числа p и q , за които

$$p^2 | q^3 + 1 \text{ и } q^2 | p^6 - 1.$$

Задача 5. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, за които

$$f(xy) = f(x+y)(f(x) + f(y)), \text{ за произволни } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

(С \mathbb{Q}^+ и \mathbb{R}^+ означаваме съответно множествата на положителните рационални и положителните реални числа.)

Задача 6. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност k . Отсечките AC и BD се пресичат в точка E , а лъчите CB^{\rightarrow} и DA^{\rightarrow} се пресичат в точка F . Докажете, че правата през центровете на вписаните окръжности на $\triangle ABE$ и $\triangle ABF$ и правата през центровете на вписаните окръжности на $\triangle CDE$ и $\triangle CDF$ се пресичат върху k .

*Всяка задача се оценява със 7 точки.
Време за работа: 4 часа и 30 минути.*

Успех!