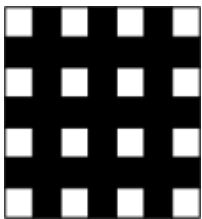


Олимпиада по комбинаторике и логике, юниоры

1. Алик, Боря, Витя и Гена взяли машину напрокат. В машине четыре места – водительское, переднее пассажирское и два задних пассажирских (левое и правое). Водить машину умеют только Боря и Гена. сколькими способами они могут сесть в эту машину и поехать на ней? (фольклор)

Ответ: 12 (2×6). **Решение.** На месте водителя могут сидеть только двое, а остальные три места могут быть заняты тремя оставшимися мальчиками любым из 6 возможных способов.



2. На картинке показан участок паркетного пола 7×7 (углы выложены белыми паркетными плитками, белые плитки не касаются друг друга). Сколькими чёрных плиток понадобится для покрытия таким же образом пола размером 2013×13 ? (К.Кноп)

Ответ: $2013 \times 13 - 1007 \times 7 = 19120$. **Решение.** Сосчитаем число белых плиток. Из 13 строк ровно 7 содержат белые плитки, а из 2013 столбцов – 1007. Поэтому белых плиток всего 1007×7 . Ответ получен вычитанием числа белых плиток из общей площади пола.

3. Сколькими способами можно расставить по кругу числа от 1 до 11 так, чтобы каждые два соседних числа отличались на 2 или на 5? Способы, получающиеся друг из друга поворотом по кругу, считать одинаковыми. (К.Кноп)

Ответ: двумя, с точностью до направления: 1 3 8 10 5 7 2 4 9 11 6. **Решение.** «Узкими местами» являются числа 1, 2, 10, 11, вокруг которых возможны единственные варианты расстановки. Это сразу даёт участки (9 11 6 1 3), (4 2 7) и (5 10 8). Число 4 может находиться только рядом с 9, а 8 – только рядом с 3. Отсюда получается единственность решения.

4. На Острове Рыцарей и Лжецов живёт клан Рыцарей, всегда говорящих правду, и клан Лжецов, которые всегда врут. Известно, что те, в чьём имени одинаковое число букв, относятся к одному клану. Однажды на дне рождения Андрея, кроме хозяина, собрались Борис, Виктор, Павел и Юрий. «Нас, рыцарей, здесь всего трое», – сказал один из гостей. «Нет, рыцарей среди нас нет вообще», – возразил ему Юрий. Сколько рыцарей было среди собравшихся? (К.Кноп)

Ответ: 2. **Решение.** Юрий не может быть рыцарем, потому что рыцарь не может сказать такое. Следовательно, Юрий лжец, а рыцари среди остальных всё-таки есть. Из условия следует, что их либо 2, либо 4. Значит, первое утверждение тоже было ложью, и кто-то еще кроме Юрия, – лжец. Всего – два рыцаря и три лжеца.

5. Шахматная фигура *мегапешка* ходит только вперёд, но на любое число клеток. Сколькими способами мегапешка может пройти со второй горизонтали на восьмую? (фольклор)

Ответ: 32. **Решение.** Пешке нужно продвинуться на 6 клеток вперёд. Будем вычислять число способов продвинуться на k клеток вперёд по порядку, начиная с $k=1$. При $k=1$ способ всего один. При $k=2$ способов 2 – либо сразу сделать ход на 2 клетки, либо на 1 клетку, а затем еще на одну. При $k=3$ имеем 4 способа: 3, 2+1, 1+2, 1+1+1. Если мы уже знаем число способов продвинуться вперед на любое меньшее число клеток, то число способов для продвижения на k считаем так: первым ходом пешка двигается на какое-то число клеток от 1 до k , а потом, если она ещё не на месте, мы уже знаем, сколько способов у неё существует. Для $k=4$ имеем $1+1+2+4=8$, для $k=5$ – 16, а для $k=6$ – 32 способа.

6. У Коли есть набор из 27 карточек – по 9 красных, синих и зелёных. Сначала Коля выкладывает в ряд три разноцветные карточки. Затем он берёт оставшиеся карточки по одной и кладёт сверху на одну из трёх стопок, причём красную карточку можно класть только на синюю, синюю только на зелёную, а зелёную – только на красную. Если оказывается, что все три верхних карточки имеют одинаковые цвета или все три карточки имеют различные цвета, то Коля громко кричит «СЕТ!» и продолжает выкладывать карточки. Коле удалось выложить все свои карточки. Сколько раз за эту игру Коля мог выкрикнуть «СЕТ!» (укажите все возможности и докажите, что других нет)? (Е.Бакаев)

Ответ: ровно 8 раз. **Решение.** Припишем каждому цвету числовое значение от 0 до 2. Например, красный=0, синий=2, зелёный=1. Выкладывание следующей карточки всегда увеличивает сумму значений верхних карточек на 1 или уменьшает ее на 2. Теперь разберемся, в какой момент Коля кричит «СЕТ!». Это может происходить при суммах 0 (0+0+0), 3 (1+1+1 или 0+1+2) или 6 (2+2+2), и никаких других вариантов с суммами 0,3,6 (при которых кричать «СЕТ!» нельзя) не бывает. Поскольку такие суммы получаются на каждом третьем выкладывании карточки, а начальная сумма равна 3, то за $27-3=24$ хода Коля будет кричать «СЕТ!» ровно 8 раз.