Краткие решения задач олимпиады 5 класса 31 января 2016

Часть А

К каждой задаче необходимо указать ответ.
Решения приводить не требуется.

1. Запишите наименьшее пятизначное число, делящееся на 3, все цифры которого различны. (*фольклор*)

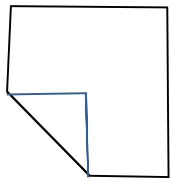
Ответ. 10236.

2. В приведённом ниже выражении поставьте знаки арифметических действий («+», «–», «×» или «÷», можно одинаковые) и один знак равенства, чтобы получилось верное равенство.

3 1 0 1 2 0 1 6 (*Г.Кондаков*)

Ответ. Один из вариантов: 3 + 1 + 0 – 1 + 2 – 0 + 1 = 6.

3. У квадратного листа бумаги загнули один угол так, что вершина оказалась в центре квадрата. (см.рис.). Площадь получившегося пятиугольника на 2см^2 меньше площади исходного квадрата. Чему равна сторона квадрата? (*фольклор*)

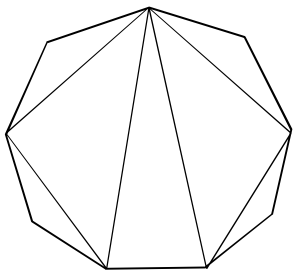


Ответ. 4см.

Решение. Площадь загнутого треугольника равна одной восьмой части площади квадрата. Поэтому площадь квадрата равна 16 см^2.

4. Разрежьте правильный 9-угольник ровно на 7 равнобедренных треугольников. (*К.Кноп*)

Ответ. Один из вариантов приведён на рисунке.



5. В 5Ю классе 7 человек едят мороженое каждый день, 9 человек едят мороженое через день, а остальные не едят мороженого вообще. Вчера 13 учеников этого класса ели мороженое. Сколько учеников будут есть мороженое сегодня? (*Е.Фисенко*)

Ответ. 10 учеников.

Решение. Поскольку вчера ели мороженое 13 человек, то из них 7 – те, кто есть мороженое каждый день. Значит, 6 – те, кто едят через день. Но тогда эти 6 завтра есть не будут, но будут есть оставшиеся трое.

6. Обычно Илья Яковлевич отдыхает только по субботам и воскресеньям. Но в феврале 2010 года Илье Яковлевичу предоставили отпуск длиной 12 дней подряд. Какое максимальное и какое минимальное количество дней непрерывного отдыха могло получиться у ИЯ в феврале? (Если суббота или воскресенье попадают в дни отпуска, то они считаются днями отпуска). (*И.Сиротовский*)

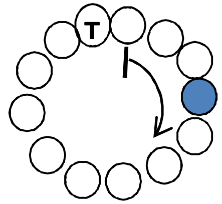
Ответ. Максимум – 16 дней, минимум – 12 дней.

Решение. В феврале 2010 года ровно 4 недели. То есть 4 пары суббота-воскресенье, которые наступают через каждые 5 рабочих дней. Поэтому максимальное количество дней отдыха получится, если в отпуск попадёт как можно меньше суббот и воскресений, а минимальное – как можно больше.

Минимум – ООС(О)В(О)ОООООС(О)В(О)О = 12 дней О – отпуск, С – суббота

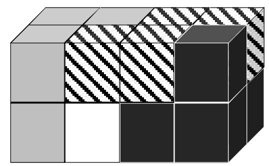
Максимум – СВОООООС(О)В(О)ОООООСВ = 16 дней В – воскресенье

7. Одиннадцать друзей Оушена, он сам и Терри встали в круг, чтобы считалкой определить, кто будет играть в шахматы. Считает Терри, он начинает с соседа слева и далее по часовой стрелке. Где нужно встать Оушену, чтобы в результате выбыли все кроме него и Терри? Известно, что Терри всегда использует считалку «Вышел-месяц-из-тумана-вынул-ножик-из-кармана» (*Е.Иванова*)

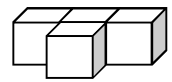


Ответ. Нужное место закрашено.

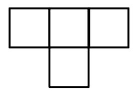
8. Из 4 фигурок, каждая из которых состоит из 4 кубиков, сложили прямоугольный параллелепипед как на рисунке. Каждая фигурка окрашена в свой цвет. Как выглядит белая фигурка? (*Казанские олимпиады*)



Решение. Поскольку в верхнем ряду кубиков белой фигурки нет, то все они в нижнем. Причём 1 кубик впереди, а три в заднем ряду кроме крайнего правого.



Принимались картинки вида



9. Ваня шёл по левой стороне улицы и считал сумму цифр всех номеров домов, что видел на этой стороне. В некоторый момент (когда он прошёл не менее двух домов) у него получилось 51. В этот момент он остановился и на другой стороне улицы увидел номер 17. У какого максимального количества домов он мог сосчитать сумму? А у какого минимального? (*А.Бронников*)

Ответ. Максимум – 11 домов, минимум – 2.

Решение.а)Поскольку на противоположной стороне 17, то на Ваниной стороне только чётные номера домов. Рассмотрим сумму цифр первых 5 домов: 2, 4, 6, 8, 10. Заметим, что единиц любых пяти последовательных номеров на чётной стороне равна 20. Значит, у первых 10 сумма единиц равна 40. Однозначных номеров не более 4. Следующие имеют в десятках 1, а следующие – 2. Значит минимальная сумма цифр у первых 10 домов равна 20+20+1x5+2=47. Следующий номер 22, добавление суммы цифр которого и даёт 51. б)Поскольку по условию Ваня прошёл не менее двух домов, то приведём пример для двух: 399998 и 400000.

10. Мальчики Паша, Коля, Толя и девочки Маша и Света собрались на каток. Но в результате пошли не все. На вопрос, кто же все-таки ходил, ребята ответили так:

Толя: нас было четверо. ***Маша***: мальчиков было больше девочек.

Паша: нас было трое. ***Света***: мы с Машей обе были.

Коля: Толи не было.

Кто ходил на каток, если правду сказали только те, кто ходил, а остальные солгали? Укажите все возможные варианты . (*Е.Иванова*)

Ответ. Маша, Паша, Коля.

Решение.Из утверждения Коли следует, что либо сам Коля ходил на каток, а Толя не ходил, либо Толя ходил, а Коля не ходил. Если бы Света сказала правду, то Маша тоже бы сказала правду, и все 3 мальчика ходили бы на каток. В частности, и Толя, и Коля пошли на каток. Противоречие. Следовательно, Света солгала. Если бы Маша тоже солгала, то мальчиков бы на каток ходило бы больше, чем девочек (девочек бы там совсем не было). Следовательно, Маша сказала правду и на каток ходила. Но тогда там было два или больше мальчика. Так как Толя и Коля не могли пойти на каток одновременно, то Паша точно ходил, а всего на каток ходило три человека. Следовательно, Толя соврал и на каток не ходил.

Часть Б

В этой части кроме ответа требуется привести решение.

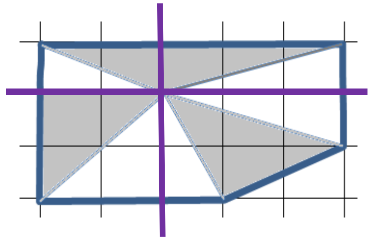
1. Можно ли числа 3, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 6 расставить в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на всех рёбрах были различны? (*фольклор*)

Ответ. Нельзя.

Решение 1. Так как сумма двух наибольших из данных чисел равна 9, то мы можем получить не более 10 различных сумм. А рёбер в кубе – 12.

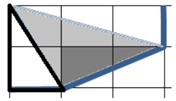
Решение 2. Заметим, что в концах диагоналей грани не могут стоять одинаковые числа, так как иначе суммы на двух соседних рёбрах будут равны. Но если две 1 стоят на концах одного ребра, то для третьей 1 нет места – для любой оставшейся вершины она будет либо на конце ребра с уже одной 1 либо по диагонали от 1.

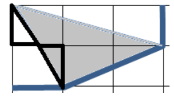
2. На клетчатой бумаге нарисовали пятиугольник и частично закрасили его серым цветом (см. рисунок). Какая часть пятиугольника имеет большую площадь: закрашенная или незакрашенная? (*по мотивам Уральских турниров.*)



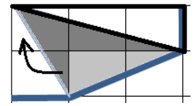
Ответ. Площади равны.

Решение 1. Разделим исходную фигурку на 4 части, как на рисунке. Тогда легко видеть, что в трех частях линия делит прямоугольник пополам – на белый и серых треугольники.





Рассмотрим оставшуюся часть. Заметим, что тёмный и выделенный белый треугольники равны. Кроме того равны маленькие треугольники на втором рисунке и, значит, равны площади серого белого выделенного кусков.



Решение 2. Площадь всего пятиугольника равна площади прямоугольника размером 3x5 клеток без половины прямоугольника 1x2 клетки. То есть площадь пятиугольника равна 14. Площади белых треугольников вычисляются и в сумме дают 7. Значит, на серую часть также приходится 7 клеток.

3. Кощей Бессмертный решил собрать сундук изумрудов и в первый день положил в пустой сундук 1 изумруд. На следующий день положил туда 2 изумруда и так далее – каждый следующий день он клал в сундук на 1 изумруд больше, чем в предыдущий. Однако во вторую ночь Баба Яга стащила из сундука 1 изумруд и каждую следующую ночь тащила на 1 изумруд больше. Как только в сундуке наберётся 2016 изумрудов, Кощей его запечатает и спрячет, и баба Яга не сможет красть. На какой день это произойдёт? (*Е.Иванова*)

Ответ. На 1009 день.

Решение1. В первый день в сундуке 1 изумруд, во второй 1+2, но сразу после второй ночи 1+2 – 1 = 2. На третий день их уже 2+3, а на третью ночь 2+3 – 2 = 3. То есть на n-ю ночь в сундуке n изумрудов, а днем (поскольку это уже n+1 день) изумрудов 2n+1. Далее ночью изумрудов уже n+1. И так далее. Нам нужно найти n, когда впервые 2n+1 будет 2016 или больше. Так как 2n+1 нечетно, то должно быть равно 2017. И тогда n = 1008. А день, соответственно 1009.

Решение2. Заметим, что поскольку днём добавляется сколько-то изумрудов, а ночью крадётся на 1 изумруд меньше, то каждой ночью количество изумрудов по сравнению с предыдущей увеличивается на 1. При этом в первую ночь был 1 изумруд, во вторую – 2 и так далее. Значит на 1008 ночь в сундуке будет 1008 изумрудов. Днём добавится ещё 1009 и получим 2017 > 2016 в первый раз.

4. На день рождения Карлсон получил коробку шоколадных конфет. Кристер съел меньше всех конфет, а Гунилла – больше всех. Малыш съел чётное число конфет, в 3 раза больше, чем Кристер и в 2 раза меньше Гуниллы. Все остальные конфеты съел Карлсон. Могло ли в коробке быть 65 конфет? (*Е.Иванова*)

Ответ. Не могло.

Решение. Пусть Кристер съел какую-то часть конфет, тогда Малыш съел в 3 раза больше, чем Кристер. То есть три таких части. Так как по условию Малыш съел чётное число конфет, то будем считать, что он съел 6х, тогда Кристер 2х, а Гунилла – 12х. Тогда все вместе они съели 20х конфет. А Карлсон съел все остальное, то есть 65 – 20х. При этом Карлсон должен был съесть меньше Гуниллы и больше Кристера. То есть меньше 20х и больше 2х. 2х < 65 – 20х < 12х.

Кристер 2х	Карлсон 65 – 20х	Гунилла 12х
2	45	12
4	25	24
6	5	36

Остальные случаи невозможны.

Но и эти случаи не подходят, поскольку в первых двух Карлсон съел больше Гуниллы, а в последнем – меньше Кристера.

5. Паша, Коля, Леша и Саша сыграли в шахматном турнире в один круг (каждый с каждым по одной партии). Оказалось, что все набрали разное количество очков, и ничьих не было. После турнира каждый высказался:

Паша: Я набрал больше всех очков.
Коля: У Леши очков больше, чем у Паши.
Леша: У Коли и Паши столько же очков в сумме, сколько и у Саши.
Саша: Мой результат лучше результата Леши.

Определите, кто какое занял место в турнире, если известно, что все солгали. (За победу в шахматах даётся 1 очко, за проигрыш – 0) (*Е.Иванова*)

Ответ. Коля – 1, Паша – 2, Леша – 3, Саша – 4.

Решение. Заметим, что если не было ничьих и у всех разное количество очков, то очки могли быть только такие: 0, 1, 2, 3. И чем больше очков, тем выше место.

Поскольку все соврали, то:

1) Паша не занял 1 место.
2) Леша не занял 1 место. Так как иначе, у него было бы больше всех очков, в том числе и больше, чем у Паши.
3) Саша не занял 1 место, так как иначе его результат был бы лучше, чем у любого другого, в том числе и у Леши.

Значит, 1 место занял Коля.

4) Так как 1 место не у Леши, то у Саши не может быть 2 места, иначе он выступил бы лучше Леши.
5) Аналогично у Леши не 2 место.

Значит, 2 место, у Паши.

6) Поскольку Саша лжет, что выступил лучше Леши, то у Леши 3 место, а у Саши - последнее

Критерии:

Каждый правильный ответ в части А стоит 2 балла (если пунктов несколько, то каждый пункт стоит 2 балла).

В части Б оценивается решение – от 0 до 5 баллов.

Творческая Лаборатория «Дважды Два»

Творческая лаборатория «2×2» – содружество преподавателей, студентов, аспирантов и просто математиков, обеспокоенных состоянием математического образования в России. Мы хотим, чтобы наши дети росли любознательными, заинтересованными, грамотными, и стараемся по мере сил этому содействовать. За много лет работы мы создали систему обучения детей математике с 1 по 11 класс. Она включает в себя матклассы, олимпиады различного уровня, кружки в разных точках Москвы.

Кроме олимпиад мы проводим выездные математические школы для всех классов. Школы проводятся в период каникул, а также майских праздников. Ближайшая школа планируется ***с 30 апреля по 10 мая***.

Летняя школа – ***с 3 по 24 августа*** – для школьников 4–8 классов.

Большое внимание мы уделяем также нашим математическим классам на базе разных школ Москвы. В прошлом наши ученики завоевали более десятка золотых медалях на международных олимпиадах по математике и физике, а также разнообразные призы и награды на других соревнованиях России и других стран. В частности в 2015 году два наших десятиклассника были включены в состав сборной России на международной Олимпиаде по математике

В этом году мы набираем 5 и 6 математические классы на базе школ 1329 (5 класс), 1210 (5 класс), 2086 (6 класс)

Более подробно со всеми направлениями нашей работы в можете познакомиться на сайте.

Олимпиада 5 класса

Письменный тур.

Результаты письменного тура будут опубликованы ***после 15 февраля*** на нашем сайте. http://mathbaby.ru

Устный тур.

Устный тур пройдёт 13 марта в помещении МИРЭА. На него будут приглашены участники, показавшие высокий результат на письменном туре.