Отборочная работа в летнюю математическую школу «ДваждыДва» в августе.

Вы можете решать задачи в любом порядке, но при отправке фотографируйте или сканируйте решения в порядке возрастания номеров. Вы можете выбрать любые пять задач, соответствующие вашему классу, которые вам больше всего понравились и решить их. Вы можете решить и записать больше задач, но подсчет будет вестись по пяти задачам, по которым достигнут наилучший результат (то есть задача полностью решена или продвижение больше, чем в других задачах. Черновики не рассматриваются.

После каждой задачи указан класс, для которого она рекомендуется. Решать задачи за класс старше, чем вы учитесь, − можно. За класс младше − нельзя.

В каждой задаче кроме ответа должно быть развернутое пояснение. Задача без решения считается нерешенной, даже если ответ верен.

Время на решение − 3 часа. Работы должны быть отправлены по адресу distant@mathbaby.ru не позднее 16:00. Время будет определяться по времени отправки письма. Работы, отправленные позже, рассматриваться не будут.

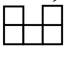
Условия задач.

1. (8-10) Можно ли представить число 2022! В виде суммы двух натуральных степеней двойки?

2. (8) Разговаривают 2022 попугая. Первый: «Второй попугай − оранжевый». Второй: «Третий попугай − оранжевый». …. 2020-й попугай: «2021-й попугай − оранжевый». 2021-й попугай: «2022-й попугай − зеленый». 2022-й попугай: «Я вовсе не зелёный!» Известно, что все оранжевые попугаи, и только они, лгут. Сколько оранжевых попугаев участвовало в разговоре?

3. (8) 10 натуральных чисел записаны в ряд. Докажите, что между ними можно расставить знаки сложения и умножения (по одному знаку между каждыми двумя соседними числами) и скобки так, что результат будет делиться на 32

4. (8-9) В остроугольном треугольнике MPK провели высоты MS и PT, которые пересеклись в точке H. Вокруг треугольника MPH описали окружность. Эта окружность пересекла стороны MK и PK в точкам A и B соответственно. Найдите AB, если ST = 17.

5. (8) В таблице 9×9 четыре клетки, находящиеся на пересечении второй и восьмой строк и второго и восьмого столбцов, окрашены в чёрный цвет; остальные клетки — белые. Какое наименьшее число белых клеток нужно ещё перекрасить в чёрный цвет так, чтобы никакие белые клетки не образовывали фигуру из пяти клеток вида  (как угодно повёрнутую)?

6. (8) Кржемилек и Вахмурка играют в игру на шахматной доске размером 101×101. Они покрасили у этой доски рамку шириной в одну клетки и ставят по очереди ладьи в клетки этой рамки. Разрешается ставить ладью на незанятые клетки причем только, если эту клетку бьют чётное число уже поставленных ладей (ладьи не бьют друг сквозь друга). Начинает Вахмурка. Кто не может сходить − проиграл. Кто сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

7. (8-9) Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на прямой AB вне отрезка AB. Докажите, что отрезки касательных, проведенных к окружностям из точки X, равны.

8. (8-10) Докажите, что для всех $x > 0$ выполняется неравенство
$$x^{8000} + \frac{1}{x^{100}} + \frac{10}{x^{90}} + \frac{100}{x^{50}} + \frac{400}{x^{5}} \geqslant 512.$$

9. (9-10) Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если его стороны отодвинуть на расстояние 1 во внешнюю сторону, то полученные прямые ограничат многоугольник, подобный исходному. Докажите, что этот многоугольник описанный.

10. (9-10) Петя выбирает некоторое натуральное число A и строит бесконечную последовательность $a_1, a_2, \dots$ по следующему правилу $a_1 = A+1$, а далее $a_{n+1} = a_1a_2\dots a_n + A$ для всех натуральных чисел n. Петя хочет, чтобы в последовательности было как можно больше точных квадратов. Какие значения A ему стоит выбирать?

11. (9-10) Окружность с диаметром PT вписана в треугольник ABC так, что касается стороны AC в точке P. Известно, что прямая BT пересекает сторону AC в точке L. Докажите, что $AL=PC$.

12. (9-10) В межгалактическом пространстве существует очень воинственное сообщество Вакаров из ста планет. Некоторые пары планет соединены лучами связи. Межгалактическая полиция имеет *инструмент*, который позволяет одним нажатие кнопки уничтожить все лучи связи, выходящие из какой-то одной планеты. Но тогда из этой планеты мгновенно устанавливаются лучи связи с теми планетами сообщества, с которыми перед этим нажатием кнопки связи не было. Полиция победит Вакаров, если сможет разделить их сообщество на две несвязанные лучами части. Найдите наименьшее число N нажатия кнопки *инструмента*, при котором полиция гарантировано сможет победить Вакаров, как бы изначально не были установлены лучи связи.

13. (9-10) В фестивале актеров участвуют 30 человек. Каждый вечер играется один спектакль, в котором участвует часть актеров, а остальные наблюдают из зала. Фестиваль можно закончить только тогда, когда любой актер увидит всех других актеров, на сцене, сам сидя в зале. За какое наименьшее число дней можно провести фест?